COURS D'ÉTUDES SCIENTIFIQUES

A L'USAGE DES CANDIDATS

AU BACCALAURÉAT ÈS SCIENCE ET AUX ÉCOLES DU GOUVERNEMENT

GÉOMÉTRIE

PAR

J. DUFAILLY

PROFESSEUR AU COLLÈGE STANISLAS

SIXIÈME ÉDITION

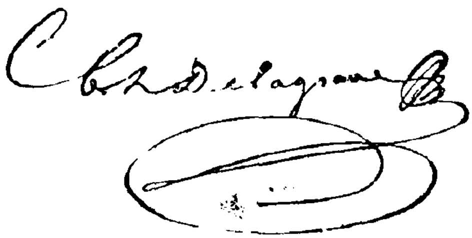
PARIS

LIBRAIRIE CH. DELAGRAVE

15, RUE SOUFFLOT, 15

1883

Tout exemplaire de cet ouvrage non revêtu de ma griffe sera réputé contrefait.



ÉLÉMENTS DE GÉOMÉTRIE

PREMIÈRE PARTIE

FIGURES PLANES

LIVRE PREMIER

LA LIGNE DROITE

DÉFINITIONS

1. On nomme *volume* toute portion limitée de l'espace. Ce qui sépare un volume de l'espace environnant est une *surface*. Lorsque deux surfaces se rencontrent, leur partie commune est une *ligne*. Lorsque deux lignes se rencontrent, leur partie commune est un *point*.

Les volumes, surfaces et lignes portent le nom de *figures*.

2. La géométrie a pour but l'étude des propriétés des figures et la mesure de leur étendue.

3. On dit que deux figures sont égales lorsqu'en les appliquant l'une sur l'autre, on peut les faire coïncider dans toute leur étendue.

4. On nomme *ligne droite* le plus court chemin d'un point à un autre. Une ligne formée de plusieurs lignes droites est dite *brisée*. Une ligne qui n'est ni droite, ni brisée, est une ligne *courbe*.

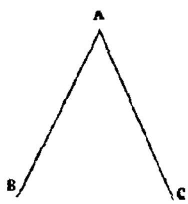
Nous regarderons comme une vérité évidente que *d'un point à un autre on ne peut mener qu'une seule ligne droite,* de telle sorte que deux lignes droites ayant deux points communs coïncident dans toute leur étendue.

5. On nomme *surface plane* ou *plan,* toute surface sur laquelle étant pris deux points à volonté, la ligne droite qui joint ces deux points est tout entière contenue dans la surface.

Une surface qui n'est ni plane, ni composée de surfaces planes est une *surface courbe.*

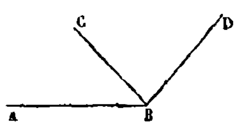
Une *figure plane* est celle dont tous les points sont contenus dans un même plan.

6. Un *angle* est la figure formée par deux droites qui se rencontrent. Le point de rencontre se nomme le *sommet* de l'angle ; les deux droites en sont *les côtés.* Ainsi les deux droites AB, AC forment un angle ayant son sommet en A.



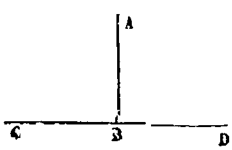
Un angle se désigne par la lettre du sommet ou par trois lettres, en ayant soin alors de placer la lettre du sommet au milieu. Ainsi on dira l'angle A ou encore l'angle BAC. Cette dernière dénomination doit être nécessairement employée s'il existe deux ou plusieurs angles ayant leur sommet au point A.

La grandeur d'un angle ne dépend nullement de la longueur de ses côtés que l'on doit supposer prolongés indéfiniment, mais bien de leur écartement.



Lorsque deux angles ont un sommet commun et un côté commun intermédiaire, on dit qu'ils sont *adjacents.* Tels sont les angles ABC, CBD.

7. Une ligne droite AB est *perpendiculaire* à une autre droite CD lorsqu'elle fait avec celle-ci deux angles adjacents ABC, ABD égaux entre eux. Ces angles se nomment *angles droits.*



Lorsqu'une droite qui en rencontre une autre, forme avec elle deux angles adjacents inégaux, on dit qu'elle est *oblique* à cette autre.

8. Un angle moindre qu'un angle droit est un angle *aigu* ; un angle plus grand qu'un angle droit est un angle *obtus*.

Deux angles sont dits *complémentaires* lorsque leur somme vaut un angle droit, et *supplémentaires* lorsque leur somme vaut deux angles droits.

9. On nomme *parallèles* deux droites qui, situées dans le même plan, ne peuvent se rencontrer quelque loin qu'on les prolonge.

10. Une figure plane limitée de toutes parts par des lignes droites est un *polygone* ; l'ensemble de ces lignes est le contour ou *périmètre* du polygone.

11. Un *triangle* est un polygone de trois côtés. On distingue parmi les triangles : le triangle *équilatéral* qui a ses trois côtés égaux ; le triangle *isocèle* dont deux côtés seulement sont égaux ; le triangle *rectangle* qui a un angle droit. Dans ce dernier triangle, le côté opposé à l'angle droit se nomme *hypoténuse*.

On nomme *base* d'un triangle l'un quelconque de ses trois côtés. — Dans un triangle isocèle, on prend ordinairement pour base, le côté qui n'est pas égal à l'un des deux autres.

12. Un *quadrilatère* est un polygone de quatre côtés. Parmi les quadrilatères, on distingue :

Le *carré* qui a ses quatre côtés égaux et ses angles droits ;

Le *rectangle*, qui a ses angles droits sans avoir ses côtés égaux ;

Le *parallélogramme*, dont les côtés opposés sont parallèles ;

Le *losange*, qui a ses côtés égaux sans avoir ses angles droits ;

Le *trapèze*, dont deux côtés seulement sont parallèles.

13. Le polygone de cinq côtés se nomme *pentagone* ; celui de six, *hexagone*, etc.

14. On nomme *diagonale* d'un polygone la ligne droite qui joint les sommets de deux angles de ce polygone non-adjacents au même côté.

15. Lorsqu'en prolongeant indéfiniment l'une quelconque des droites qui limitent un polygone, ce polygone est tout entier d'un même côté de la ligne prolongée, on le nomme *polygone convexe*.

16. On nomme :

Axiome, une vérité évidente par elle-même ;
Théorème, une vérité qui a besoin d'être démontrée ;
Corollaire, une conséquence d'un théorème.

L'énoncé d'un théorème contient deux parties : une *hypothèse* ou supposition et une conclusion qu'on en tire. En renversant l'énoncé d'un théorème de manière à prendre la conclusion pour hypothèse et l'hypothèse pour conclusion, on forme l'énoncé du théorème *réciproque* du premier. Ce théorème réciproque n'est pas nécessairement vrai.

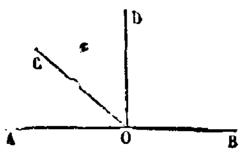
On désigne sous le nom commun de *propositions* les théorèmes et aussi les *problèmes*, c'est-à-dire les questions proposées qu'il faut résoudre.

ANGLES ET TRIANGLES

THÉORÈME I.

17. *D'un point* O *pris sur une droite* AB, *on peut élever une perpendiculaire sur cette droite, et on n'en peut élever qu'une.*

Menons par le point O une droite OC quelconque faisant avec AB deux angles inégaux, et soit AOC le plus petit de ces deux angles. Si nous faisons tourner la droite OC autour du point O jusqu'à ce qu'elle vienne s'appliquer sur OB, il arrivera un moment où l'angle AOC sera devenu plus grand que l'angle COB. Donc il existe une position OD de la droite dans laquelle elle fait avec AB deux angles égaux et il est clair d'ailleurs qu'il n'en existe qu'une.



18. Corollaire. — *Tous les angles droits sont égaux.*

Soient la droite CD perpendiculaire sur AB et la droite GH

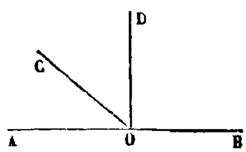
perpendiculaire sur EF : je dis que l'angle droit FGH est égal à l'angle droit BCD.

En effet, appliquons EF sur AB de telle sorte que le point G tombe en C : comme on ne peut élever en un point d'une droite qu'une seule perpendiculaire sur cette droite, GH prendra la direction CD et les angles FGH, BCD coïncideront.

THÉORÈME II.

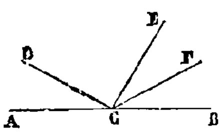
19. *Lorsqu'une ligne droite* CO *en rencontre une autre* AB, *elle forme avec celle-ci deux angles adjacents* COA, COB *supplémentaires, c'est-à-dire dont la somme est égale à deux angles droits.*

Élevons la perpendiculaire OD sur AB. L'angle BOC,



vaut un angle droit, plus l'angle DOC ; donc les angles BOC, COA valent ensemble un angle droit, plus la somme des angles DOC, COA. Or, cette dernière somme est égale à l'angle droit DOA, donc enfin la somme des angles BOC, COA est égale à deux angles droits.

20. Corollaire I. — Lorsque l'un des angles formés par la droite OC avec AB est droit, l'autre angle est également droit.

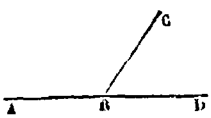


21. Corollaire II. — La somme des angles formés d'un même côté d'une droite AB par plusieurs droites issues du même point C est égale à deux angles droits En effet, l'angle DCB, somme des angles DCE, ECF, FCB est le supplément de l'angle ACD.

THÉORÈME III.

22. *Lorsque deux angles adjacents* ABC, CBD *sont supplémentaires, leurs côtés extérieurs* AB, BD *sont en ligne droite.*

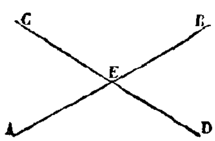
En effet, l'angle formé par la droite BC avec le prolongement de AB doit être le supplément de l'angle ABC (19) donc ce prolongement n'est autre que la droite BD.



THÉORÈME IV.

23. *Lorsque deux lignes droites* AB, CD *se coupent, les angles opposés par le sommet sont égaux.*

En effet, l'angle AEC a pour supplément l'angle CEB (19), et l'angle BED a pour supplément le même angle CEB : donc les angles CEA, BED sont égaux entre eux.



On démontrerait de même l'égalité des angles CEB, AED.

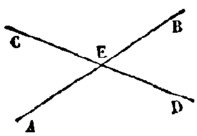
24. Corollaire. — Si l'un des angles AEC formé par les droites qui se coupent est un angle droit, les trois autres sont également droits et par suite chacune des droites est perpendiculaire sur l'autre.

25. Remarque. — La somme des quatre angles formés autour du point E est égale à quatre angles droits.

En général, si l'on considère autant de droites que l'on veut partant d'un même point E, la somme des angles qu'elles forment entre-elles est égale à quatre angles droits, car elle vaut évidemment la somme des angles que l'on peut former en menant par le point E deux droites qui se coupent.

THÉORÈME V.

26. *Lorsque deux droites* EB, EA *font avec une droite* CD *de part et d'autre de cette droite deux angles* BED, CEA *égaux entre eux et non adjacents, ces deux droites sont sur le prolongement l'une de l'autre.*

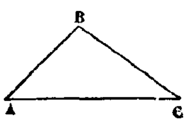


En effet, le prolongement de la droite EB doit faire avec CE un angle égal à l'angle BED (23) : ce prolongement n'est donc autre que la droite EA.

THÉORÈME VI.

27. *Dans tout triangle un côté quelconque est moindre que la somme des deux autres.*

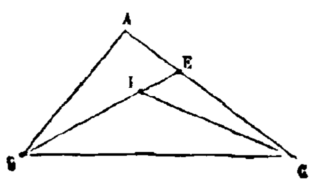
En effet, le plus court chemin de A en C est la ligne droite AC. On a donc $AC < AB + BC$.



28. Corollaire. — Si l'on retranche BC de chacun des deux membres de l'inégalité qui précède, on trouve $AC - BC < AB$, donc *dans tout triangle un côté quelconque est plus grand que la différence des deux autres.*

THÉORÈME VII.

29. *Si d'un point* D *pris dans l'intérieur d'un triangle* ABC, *on mène des droites* DB, DC *aux extrémités d'un côté* BC, *la somme de ces droites est moindre que la somme des deux autres côtés* AB, AC *du triangle.*



Prolongeons BD jusqu'à sa rencontre en E avec le côté AC : nous aurons dans le triangle DCE :

$$DC < DE + EC,$$

et dans le triangle BAE.

$$BE \text{ ou } BD + DE < BA + AE.$$

Ajoutant membre à membre ces deux inégalités et supprimant ensuite le terme DE commun aux deux membres du résultat, il vient :

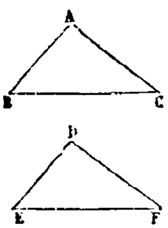
$$BD + DC < BA + AE + EC,$$

ou

$$BD + DC < BA + AC.$$

THÉORÈME VIII.

30. *Deux triangles sont égaux lorsqu'ils ont un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun.*



Soient les deux triangles ABC, DEF dans lesquels on a l'angle A égal à l'angle D, le côté AB = DE et le côté AC = DF : je dis que ces triangles sont égaux.

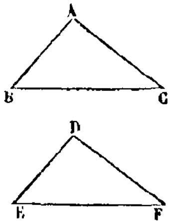
Portons le triangle DEF sur ABC et plaçons DE sur AB de telle sorte que le point D tombe en A et le point E en B. L'angle D étant égal à l'angle A, le côté DF prendra la direction du côté AC, et comme il lui est égal, le point F tombera en C. Le côté EF s'appliquera donc sur BC, et les triangles, coïncidant dans toute leur étendue sont égaux.

THÉORÈME IX.

31. *Deux triangles sont égaux lorsqu'ils ont un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun.*

Soient les deux triangles ABC, DEF dans lesquels on a le côté BC égal au côté EF, l'angle B égal à l'angle E et l'angle C égal à l'angle F : je dis que ces triangles sont égaux.

Portons le triangle DEF sur ABC et plaçons EF sur BC, de telle sorte que le point E tombe en B et le point F en C.

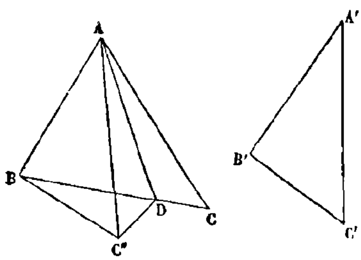


L'angle E étant égal à l'angle B, le côté ED prendra la direction de BA et le point D viendra se placer quelque part sur BA. D'un autre côté, ce même point D devra aussi se placer quelque part sur CA, car l'angle F étant égal à l'angle C, le côté FD prendra la direction de CA. Donc enfin le point D tombera au point A de rencontre des droites BA, CA et les deux triangles coïncidant dans toute leur étendue sont égaux.

THÉORÈME X.

32. *Lorsque deux triangles ont deux côtés égaux chacun à chacun et que l'angle compris entre les deux côtés du premier est plus grand que l'angle compris entre les deux côtés du second, le troisième côté du premier triangle est plus grand que le troisième côté du second.*

Soient les deux triangles ABC, A′B′C′ dans lesquels on a le côté AB = A′B′, le côté AC = A′C′ et l'angle BAC plus grand que l'angle B′A′C′ : je dis que le côté BC est plus grand que le côté B′C′.



Menons la droite AC″ faisant avec AB l'angle BAC″ égal à l'angle A′, prenons AC″ = A′C′ et joignons BC″. Les triangles BAC″, B′A′C′ sont égaux comme ayant un angle égal compris entre deux côtés égaux (30) : on a donc BC″ = B′C′, et par suite, il suffit de démontrer que BC est plus grand que BC″. Pour cela, partageons l'angle C″AC en deux parties égales au moyen de la droite AD et joignons DC″. Les triangles ADC, ADC″ ont un angle égal compris entre deux côtés égaux, donc ils sont égaux et C″D = CD. Mais on a dans le triangle BDC″, BD + DC″ > BC″ (27) : remplaçant DC″ par son égal DC, il vient BC > BC″ et le théorème est démontré.

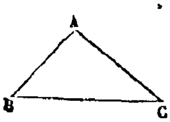
33. Réciproquement, *lorsque deux triangles ont deux côtés égaux chacun à chacun, et les troisièmes côtés inégaux, les angles opposés à ces côtés sont inégaux et le plus grand est l'angle opposé au plus grand côté.*

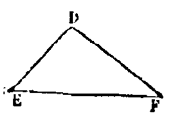
En effet, les côtés AB, AC étant supposés respectivement égaux aux côtés A′B′, A′C′ et le côté BC étant plus grand que B′C′, l'angle A ne saurait être égal à l'angle A′, car on aurait alors BC = B′C′ (30). L'angle A ne saurait non plus être moindre que A′, car alors, d'après la proposition directe, (32), on aurait BC < B′C′. Donc enfin l'angle A est plus grand que l'angle A′.

THÉORÈME XI.

34. *Deux triangles sont égaux lorsqu'ils ont les trois côtés égaux chacun à chacun.*

Soient les triangles ABC, DEF dans lesquels on a AB = DE, AC = DF, BC = EF : je dis que ces triangles sont égaux.



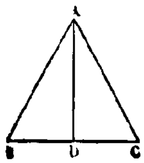


En effet, l'angle A est égal à l'angle D, car les côtés qui comprennent ces angles étant égaux, si l'angle A était différent de l'angle D, les côtés BC, EF seraient inégaux (32), ce qui est contre l'hypothèse. On reconnaîtrait de même que l'angle B est égal à l'angle E, et l'angle C à l'angle F. Les triangles ABC, DEF sont donc égaux.

35. Remarque. — Dans deux triangles égaux, les angles égaux sont opposés aux côtés égaux.

THÉORÈME XII.

36. *Dans un triangle isocèle, les angles opposés aux côtés égaux sont égaux.*



Soit le triangle ABC dans lequel le côté AB = AC : il s'agit de démontrer que l'angle B est égal à l'angle C.

Joignons le sommet A au milieu D de la base

BC ; les deux triangles ABD, ADC ont les trois côtés égaux chacun à chacun: AD commun, AB = AC par hypothèse et BD = DC par construction. Donc ils sont égaux et les angles B et C opposés au côté AD sont égaux.

37. Corollaire I. — De l'égalité des triangles ABD, DAC, on déduit que l'angle BAD = l'angle DAC et aussi que les angles BDA, CDA sont égaux. Donc *la ligne qui joint le sommet d'un triangle isocèle au milieu de la base, divise l'angle du sommet en deux parties égales et est perpendiculaire sur la base.*

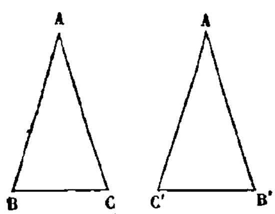
38. Corollaire II. — *Un triangle équilatéral est équiangle, c'est-à-dire a les trois angles égaux.*

En effet, les angles d'un tel triangle sont deux à deux opposés à des côtés égaux.

THÉORÈME XIII.

39. *Lorsque deux angles d'un triangle sont égaux, les côtés opposés à ces angles sont égaux et le triangle est isocèle.*

Soit le triangle BAC dans lequel on a l'angle B = l'angle C : je dis que le côté AB = AC.



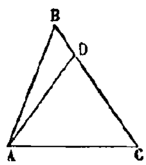
Traçons la droite C'B' = BC ; faisons en C' l'angle B'C'A' = l'angle C, et en B' l'angle C'B'A' = l'angle B. Les deux triangles ABC, A'C'B' seront égaux comme ayant un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun, et le côté B'A' opposé à l'angle C' sera égal au côté BA opposé à l'angle C. Mais si l'on porte le triangle B'A'C' sur BAC en plaçant le côté B'C' sur BC, de telle sorte que le point C' tombe en B et le point B' en C, les deux figures coïncideront puisque l'angle C' égal à l'angle C est aussi égal à l'angle B et que l'angle B' égal à l'angle B est aussi égal à l'angle C : par suite le côté B'A' est égal au côté AC. Donc enfin les deux côtés AB, AC, tous deux égaux au côté A'B' sont égaux entre eux et le triangle ABC est isocèle.

40. Corollaire. — Un triangle équiangle est en même temps équilatéral.

THÉORÈME XIV.

41. *De deux côtés d'un triangle opposés à deux angles inégaux, le plus grand est celui qui est opposé au plus grand angle.*

Soit dans le triangle ABC l'angle A plus grand que l'angle C : je dis que le côté BC est plus grand que le côté AB.



Menons la droite DA qui forme l'angle DAC égal à l'angle C : le triangle ADC est isocèle (39) et l'on a AD = DC. Mais dans le triangle ABD, le côté AB est moindre que AD + DB ; remplaçant AD par son égal DC, il vient AB < BD + DC ou enfin AB < BC.

42. Réciproquement, *Si dans un triangle* ABC, *on a le côté* BC *plus grand que* AB, *l'angle* BAC *opposé à* BC *est plus grand que l'angle* C *opposé à* AB.

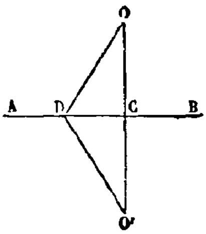
En effet, si les angles BAC et C étaient égaux, les côtés AB, BC le seraient également ce qui est contre l'hypothèse. De même si l'angle BAC était moindre que l'angle C, d'après la proposition directe, le côté BC serait moindre que AB, ce qui est encore contre l'hypothèse. Donc l'angle BAC est plus grand que l'angle C.

PERPENDICULAIRES ET OBLIQUES.

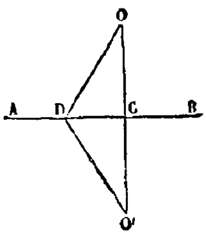
THÉORÈME XV.

43. *D'un point* O *pris en dehors d'une droite* AB, *on peut mener une perpendiculaire sur cette droite, et on n'en peut mener qu'une.*

1° Menons une droite quelconque OD partant du point O et rencontrant AB, faisons l'angle CDO′=CDO, prenons DO′=DO et joignons OO′. Les deux triangles ODC, O′DC ont un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun, donc ils sont égaux (30) et les angles OCD, O′CD opposés aux côtés égaux, OD, O′D sont égaux. La droite AB formant avec OO′ deux angles adjacents égaux est donc perpendiculaire sur OO′ et réciproquement OO′ est perpendiculaire sur AB.



2° Soit OC perpendiculaire sur AB : menons du point O une autre droite OD rencontrant AB, prolongeons OC d'une longueur CO′=OC et joignons O′D. Les deux triangles DOC, DO′C ont un angle égal compris entre deux côtés égaux, chacun à chacun, donc ils sont égaux (30) et les angles ODC, O′DC opposés aux côtés égaux OC, O′C sont égaux. Il en résulte qu'ils ne sauraient être des angles droits, car autrement leurs côtés DO, DO′ seraient en ligne droite et il existerait deux droites entre les points O et O′. Donc toute ligne OD partant du point O et autre que OC est oblique sur la droite AB.



THÉORÈME XVI.

44. *Si d'un point pris hors d'une droite on abaisse sur cette droite une perpendiculaire et différentes obliques :*

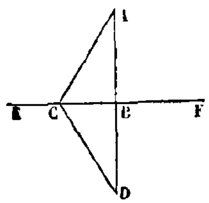
1° *La perpendiculaire est plus courte que toute oblique ;*

2° *Deux obliques qui s'écartent également du pied de la perpendiculaire sont égales ;*

3° *De deux obliques qui s'écartent inégalement du pied de la perpendiculaire, celle qui s'en écarte le plus est la plus grande.*

1° Soient les deux droites AB, AC, la première perpendiculaire, la seconde oblique sur la droite EF : je dis que AB est plus courte que AC.

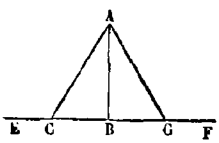
Prolongeons AB d'une longueur BD = AB et joignons CD.



Les deux triangles ABC, BDC sont égaux comme ayant un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun, savoir : les angles ABC, DBC égaux comme droits, le côté CB commun et le côté AB = BD par construction : Donc le côté AC = DC.

Or, dans le triangle ACD, on a AD < AC + CD, donc AB moitié de AD est moindre que AC moitié de AC + CD.

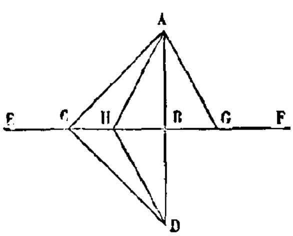
2° Soient les deux obliques AC, AG qui s'écartent également



du pied de la perpendiculaire AB, c'est-à-dire menées de telle sorte que l'on ait BC = BG : je dis que ces deux lignes sont égales.

En effet, les deux triangles ABC, ABG sont égaux comme ayant un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun (30) ; donc le côté AC opposé à l'angle droit ABC est égal au côté AG opposé à l'angle droit ABG.

3° Soient les deux obliques AC, AG et la perpendiculaire AB;



supposons la distance BC plus grande que BG : l'oblique AC sera plus grande que l'oblique AG.

Prenons BH = BG, joignons AH ; prolongeons AB d'une longueur BD = AB : joignons HD, CD. Les droites HD, CD sont respectivement égales aux droites AH, AC, comme obliques s'écartant également du pied d'une droite CB perpendiculaire sur AD. Or AH + HD est moindre que AC + CD (29), donc AH moitié de AH + HD est moindre que AC moitié de AC + CD. Mais AH = AG puisque l'on a pris BH = BG (2°), donc enfin l'oblique AG est moindre que l'oblique AC.

45. Remarque. — Les réciproques des différentes parties du théorème sont vraies.

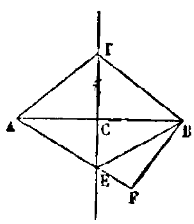
46. Corollaire I. — On mesure la distance d'un point à une droite par la perpendiculaire abaissée du point sur la droite puisque cette perpendiculaire est la plus courte ligne qu'on puisse mener du point à la droite.

47. Corollaire II. — D'un point pris hors d'une droite, on ne peut mener à cette ligne que deux droites égales, car une troisième droite partant du même point serait ou plus rapprochée ou plus éloignée que les deux premières du pied de la perpendiculaire abaissée du point sur la droite.

THÉORÈME XVII.

48. *Si d'un point* C *milieu d'une droite* AB *on élève une perpendiculaire* DE *sur cette droite* : 1° *tout point de la perpendiculaire est également distant des extrémités* A *et* B *de la droite* ; 2° *tout point situé hors de la perpendiculaire est inégalement distant des extrémités* A *et* B.

1° Joignons un point D quelconque de la perpendiculaire DE aux points A et B : les deux obliques DA, DB s'écartent également du pied C de la perpendiculaire, donc elles sont égales et le point D est également distant des points A et B.



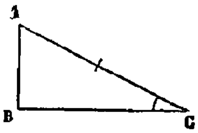
2° Soit F un point pris hors de la perpendiculaire DE, joignons FA, FB ; la droite FA rencontre la perpendiculaire en un point E et si l'on mène EB, on a $EB = EA$. Or, dans le triangle EFB, on a $FB < EF + EB$, donc en remplaçant EB par son égal EA il vient $FB < FA$. Le point F est donc inégalement distant des points A et B.

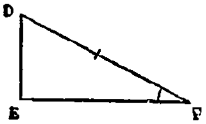
49. Remarque. — On nomme *lieu géométrique* une ligne dont tous les points jouissent d'une propriété qui leur est commune, à l'exclusion de tous les autres points du plan. Le théorème qui précède peut donc être énoncé ainsi : *Le lieu géométrique des points également distants de deux points donnés* A *et* B *est la perpendiculaire élevée sur le milieu de la droite qui joint ces deux points.*

THÉORÈME XVIII.

50. *Deux triangles rectangles sont égaux lorsqu'ils ont l'hypoténuse égale et un côté de l'angle droit égal.*

Soient les deux triangles ABC, DEF rectangles en B et en E et dans lesquels on suppose l'hypoténuse AC = DF et le côté AB = DE : je dis que ces deux triangles sont égaux.



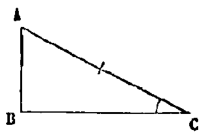


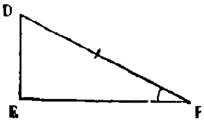
Portons le triangle DEF sur ABC et plaçons le côté DE sur son égal AB de telle sorte que le point D tombe en A et le point E en B · le côté EF perpendiculaire sur DE prendra la direction de la droite BC perpendiculaire sur AB et le point F tombera en C, car les droites égales DF, AC sont des obliques par rapport à AB et par suite s'écartent également du pied B de cette droite Les deux triangles, coïncidant dans toute leur étendue, sont donc égaux.

THÉORÈME XIX.

51. *Deux triangles rectangles sont égaux lorsqu'ils ont l'hypoténuse égale et un angle aigu égal.*

Soient les deux triangles ABC, DEF rectangles en B et en E, et dans lesquels l'hypoténuse AC = DF et l'angle aigu C = l'angle aigu F : je dis que ces deux triangles sont égaux. Portons le triangle DEF sur le triangle ABC et plaçons l'hypoténuse DF sur son égale AC de telle sorte que le point D tombe en A et le point F en C. A cause de l'égalité des angles en F et C, le côté FE prendra la direction CB et comme d'un point on ne peut abaisser qu'une perpendiculaire sur une droite (43), la droite DE s'appliquera sur AB. Les deux triangles, coïncidant dans toute leur étendue, sont donc égaux.

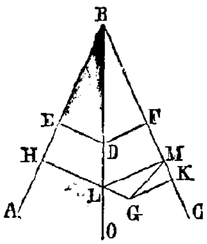




THEORÈME XX.

52. *La bissectrice d'un angle, c'est-à-dire la droite qui divise cet angle en deux parties égales, est le lieu géométrique des points également distants des côtés de l'angle.*

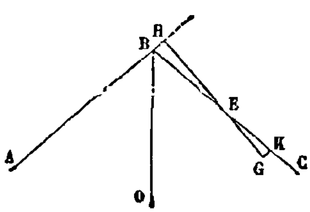
Soit la droite BO bissectrice de l'angle ABC, il s'agit de démontrer que tout point D pris sur cette droite est également distant des côtés AB, BC, et que tout point G pris en dehors est inégalement distant de ces mêmes côtés.



1° Abaissons sur les côtés AB, BC les perpendiculaires DE, DF qui mesurent les distances du point D à ces côtés (46). Les deux triangles rectangles BED, BDF ont l'hypoténuse BD commune et les angles aigus en B égaux, donc ils sont égaux (51) et par suite DE $=$ DF.

2° Abaissons les perpendiculaires GH, GK sur les côtés de l'angle ABC, du point L où GH coupe la bissectrice, abaissons LM perpendiculaire sur BC et joignons GM. La ligne GK perpendiculaire sur BC est plus courte que l'oblique GM : or dans le triangle GLM, on a : $GM < GL + LM$ ou $GM < GH$, car $LM = LH$ puisque le point L est situé sur la bissectrice. On a donc à *fortiori* $GK < GH$.

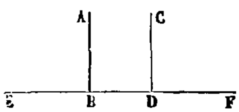
53. **Remarque.** Si l'une des perpendiculaires abaissées du point G, GH par exemple rencontrait non le côté AB lui-même, mais son prolongement, on aurait la droite GK perpendiculaire sur BC plus courte que l'oblique GE, et à *fortiori* plus courte que GH.



PARALLÈLES.

THÉORÈME XXI.

54. *Deux droites* AB, CD *perpendiculaires sur une même droite* EF *sont parallèles.*

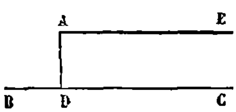


En effet, comme on ne peut abaisser d'un point qu'une seule perpendiculaire sur la droite EF, les deux lignes AB, CD ne sauraient se rencontrer.

THÉORÈME XXII.

55. *D'un point* A *pris hors d'une droite* BC, *on peut mener une parallèle à cette droite, mais on n'en peut mener qu'une seule.*

Abaissons du point A la perpendiculaire AD sur BC et menons au point A la perpendiculaire AE sur AD. En vertu du théorème précédent, la droite AE est parallèle à BC.



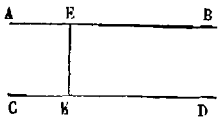
Nous admettrons comme évident qu'on ne peut mener par un point qu'une seule parallèle à une droite.

56. Corollaire. Étant données deux ou plusieurs droites parallèles entre elles, toute ligne droite qui rencontre l'une d'elles, rencontrera les autres.

THÉORÈME XXIII.

57. *Lorsque deux droites* AB, CD *sont parallèles, toute droite* EK *perpendiculaire sur l'une est aussi perpendiculaire sur l'autre.*

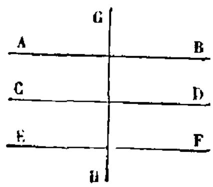
Supposons EK perpendiculaire sur CD : elle rencontrera AB



en un certain point E en vertu du corollaire du théorème qui précède. De plus elle sera perpendiculaire sur AB, car si par le point E on mène une perpendiculaire sur EK, elle doit être parallèle à CD (54) et par suite ne peut différer de AB.

58. Corollaire. *Deux droites parallèles à une troisième sont parallèles entre elles.*

Soient les droites CD, EF parallèles l'une et l'autre à la

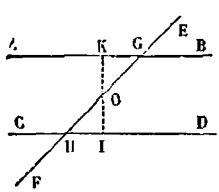


droite AB ; menons GH perpendiculaire sur AB : elle sera en même temps perpendiculaire sur CD et sur EF (57). Donc les deux droites CD, EF perpendiculaires à une même droite GH sont parallèles (51).

THÉORÈME XXIV.

59. *Lorsque deux parallèles* AB, CD *sont coupées par une sécante* EF, *elles forment avec cette droite aux deux points* G *et* H *quatre angles aigus égaux entre eux et quatre angles obtus égaux entre eux.*

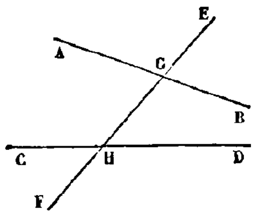
Du point O milieu de GH menons IK perpendiculaire sur



les parallèles AB, CD. Les triangles rectangles OKG, OIH ont les hypoténuses OG, OH égales et les angles aigus en O égaux comme opposés par leur sommet, donc ils sont égaux (51) et l'angle KGO est égal à l'angle IHO. L'égalité de ces deux angles entraîne celle des angles aigus EGB, CHF et aussi celle des quatre angles obtus, car chacun de ces derniers est le supplément d'un des angles aigus.

60. Remarque I. — Deux angles situés d'un même côté de la sécante EF, soit entre les deux parallèles, soit tous deux en dehors, sont supplémentaires.

61. Remarque II. — Lorsque deux droites *quelconques* AB, CD sont coupées par une sécante EF, on nomme angles *internes*, les quatre angles AGH, HGB, CHG, GHD compris entre les deux droites, et angles *externes*, les quatre angles AGE, EGB, CHF, FHD situés en dehors.



Deux angles tels que AGH, GHD, tous deux internes, situés de part et d'autre de la sécante et non adjacents, sont dits *alternes-internes*. Deux angles, tous deux externes, situés de part et d'autre de la sécante et non adjacents, sont dits *alternes-externes :* tels sont les angles AGE, FHD.

On nomme angles ***correspondants*** deux angles tels que EGB, GHD l'un externe, l'autre interne, tous deux situés du même côté de la sécante et non adjacents.

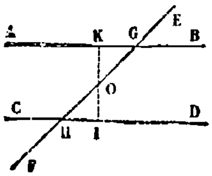
Ces dénominations étant établies, le théorème 24 peut s'énoncer ainsi :

Deux parallèles coupées par une sécante forment avec celle-ci : 1° *des angles alternes-internes égaux ;* 2° *des angles alternes-externes égaux*; 3° *des angles correspondants égaux*; 4° *des angles internes ou externes du même côté de la sécante supplémentaires.*

THÉORÈME XXV.

62. *Réciproquement, deux droites* AB, CD *sont parallèles lorsqu'elles font avec une sécante* EF *des angles alternes-internes égaux, ou des angles alternes-externes égaux, ou des angles correspondants égaux, ou enfin des angles tous deux internes ou externes du même côté de la sécante supplémentaires.*

Supposons d'abord les angles alternes internes AGH, GHD égaux entre eux. Du point O milieu de GH abaissons OK perpendiculaire sur AB et OI perpendiculaire sur CD : les deux triangles rectangles OGK, HOI ont les hypoténuses OG, OH égales et les angles aigus en G et H égaux, donc ils sont égaux (51) et les angles



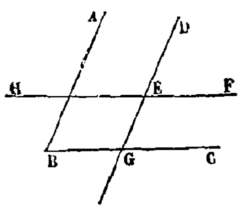
KOG, IOH sont égaux. Par suite OI est le prolongement de OK (26) et les deux droites AB, CD perpendiculaires sur la droite KI sont parallèles.

Si nous supposons maintenant les angles alternes externes EGB, CHF, égaux, nous en déduirons l'égalité des angles AGH, GHD et nous serons ainsi ramenés au cas précédent. Il en serait de même si nous supposions égaux deux angles correspondants, ou si nous supposions supplémentaires deux angles tous deux internes ou externes situés du même côté de la sécante EF.

THÉORÈME XXVI.

63. *Deux angles qui ont leurs côtés parallèles chacun à chacun sont égaux ou supplémentaires.*

Soit l'angle ABC : menons DG parallèle à AB et HF parallèle à BC. Les angles ABC, DGC sont égaux comme angles correspondants formés par deux parallèles (61), mais l'angle DEF égale l'angle DGC pour la même raison, donc les deux angles ABC, DEF sont égaux.



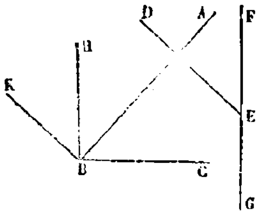
L'angle HEG opposé par le sommet à l'angle DEF est égal à l'angle ABC. Les angles DEH, FEG supplémentaires de l'angle DEF sont également supplémentaires de l'angle ABC.

Les angles dont les côtés sont parallèles sont donc égaux lorsque les côtés parallèles sont dirigés à la fois dans le même sens ou en sens contraire. Ils sont supplémentaires lorsque deux côtés parallèles sont dirigés dans le même sens, et les deux autres en sens contraires.

THÉORÈME XXVII.

64. *Deux angles qui ont leurs côtés perpendiculaires chacun à chacun sont égaux ou supplémentaires.*

Soit l'angle ABC. Menons FG perpendiculaire sur BC et ED perpendiculaire sur AB: je dis que l'angle DEF est égal à l'angle ABC.



Menons au point B les droites BH, BK respectivement perpendiculaires sur les côtés BC, BA: ces droites seront parallèles aux droites EF, DE (54) et par suite leur angle KBH sera égal à l'angle DEF dont les côtés sont dirigés dans le même sens; mais l'angle KBH est égal à l'angle ABC, car ils sont l'un et l'autre complémentaires du même angle HBA. Donc enfin l'angle DEF $=$ ABC.

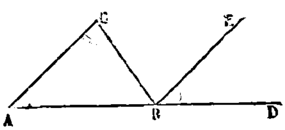
L'angle DEG supplémentaire de DEF est le supplément de ABC.

En résumé, deux angles tous deux aigus ou obtus qui ont leurs côtés perpendiculaires chacun à chacun sont égaux, et deux angles l'un aigu, l'autre obtus, dont les côtés sont dans les mêmes conditions, sont supplémentaires.

THÉORÈME XXVIII. ///

65. *La somme des angles de tout triangle est égale à deux angles droits.*

Soit le triangle ABC: prolongeons le côté AB et menons BE parallèle à AC. Les angles CAB, EBD sont égaux comme correspondants formés par des parallèles et les angles ACB, CBE sont pareillement égaux comme alternes-internes formés par des parallèles (61).



Les trois angles du triangle valent donc les angles réunis au point B. Or la somme de ces derniers angles vaut deux angles droits, (21) donc la somme des trois angles du triangle est égale à deux angles droits.

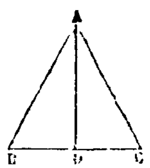
66. Corollaire I. — L'angle CBD formé par un côté BC du triangle et le prolongement d'un autre côté AB, se nomme angle *extérieur*. Il résulte de la démonstration du théorème que *l'angle extérieur d'un triangle est égal à la somme des angles intérieurs non adjacents.*

67. Corollaire II. — Un triangle ne peut avoir qu'un seul angle droit ou obtus. Dans un triangle rectangle, les deux angles aigus sont complémentaires.

68. Corollaire III. — Dans un triangle équilatéral chaque angle vaut les $\frac{2}{3}$ d'un angle droit.

69. Corollaire IV. — Lorsque deux triangles ont deux angles égaux chacun à chacun, leurs troisièmes angles sont égaux entre eux, car chacun d'eux est le supplément de la somme des deux premiers.

70. Remarque. — Si dans un triangle équilatéral ABC, on abaisse AD perpendiculaire sur BC, dans le triangle rectangle ADC, le côté DC moitié de BC est aussi moitié de l'hypoténuse AC, de plus l'angle DAC moitié de l'angle BAC vaut $\frac{1}{3}$ d'angle droit. Donc lorsque dans un triangle rectangle un côté de l'angle droit est égal à la moitié de l'hypoténuse, l'angle opposé à ce côté est égal au tiers d'un angle droit. La réciproque est vraie.



THÉORÈME XXIX.

71. *La somme des angles d'un polygone convexe est égale à autant de fois deux angles droits que le polygone a de côtés moins deux.*

Soit le polygone ABCDEF : menons par le sommet A des diagonales aux sommets non adjacents C, D, E ; nous formons ainsi autant de triangles qu'il y a de côtés moins deux dans le polygone, car chacun des triangles intermédiaires ne contient qu'un seul côté du polygone, tandis que les triangles extrêmes en contiennent deux l'un et l'autre. Or la somme des angles du polygone est