VUIBERT PRÉPAS

X. Oudot
Avec la participation de H. Cerf-Danon & de V. Lods

MATHS
MP/MP*

CONFORME AU NOUVEAU PROGRAMME

Tout-en-un

- Tout le cours
- Fiches de synthèse
- Conseils méthodologiques
- Vrai/faux
- Exercices d'application
- Sujets de concours
- Tous les corrigés détaillés

Vuibert

Avant-propos

Cet ouvrage vous propose, en un seul volume, toutes les clés nécessaires pour réussir votre année de mathématiques en MP/MP*.

Cours complet

Rigoureusement conforme aux nouveaux programmes, il contient tous les outils pour acquérir les connaissances et les savoir-faire indispensables.

Fiches de synthèse et de méthodes

Pour une révision efficace avant les kholles ou les épreuves, l'essentiel du cours est présenté de manière synthétique sous forme de fiches de révision et complété par de nombreux conseils méthodologiques pour acquérir les bons réflexes.

Vrai/faux

Première étape vers l'entraînement, des vrais/faux vous permettent de tester rapidement la compréhension du cours.

Exercices d'application

Application directe du cours, ces nombreux exercices sont assortis d'un corrigé détaillé. Chacun à un niveau de difficulté clairement identifié : ●○○, ●●○ ou ●●●.

Sujets de concours

Pour se mettre en situation d'épreuves, une sélection d'exercices extraits de sujets de concours vous est proposée. Tous ces exercices sont intégralement corrigés.

Table des matières

Préface

Depuis leur création à la fin du XIX^e siècle (par Henri Vuibert, alors plus jeune agrégé de mathématiques de France) les Éditions Vuibert proposent des manuels scientifiques rédigés par les meilleurs auteurs, tous professeurs passionnés par leur discipline et leur enseignement.

Ce fut donc avec un très grand plaisir que je fus contacté pour diriger une nouvelle collection d'ouvrages scientifiques destinés aux étudiants préparationnaires, en adéquation avec les nouveaux programmes de la rentrée 2013.

Nous avons réuni pour cette tâche difficile des auteurs de grand talent, aussi bien pour leur qualification disciplinaire que pour leur désir de communiquer leur savoir à un public de plus en plus hétérogène.

Entre 1980 et 2010, le nombre d'étudiants de CPGE scientifique a plus que doublé, de nouvelles sections ont vu le jour, des classes ont ouvert dans un grand nombre de villes ; pendant cette période, la formation initiale scientifique des élèves à la sortie de l'enseignement secondaire a beaucoup évolué, en même temps que s'érodait le nombre d'heures alloué aux disciplines scientifiques.

L'écart s'est donc creusé entre la terminale et les classes préparatoires aux grandes écoles. Il revient alors aux manuels, comme aux professeurs, de faire preuve de qualités pédagogiques exceptionnelles, sans jamais sacrifier la rigueur indispensable qui est une des forces de l'enseignement supérieur « à la française ». C'est dans ce but que les livres de la collection Vuibert Prépas ont été pensés et rédigés. Ils sont destinés au plus grand nombre et visent à amener ce plus grand nombre au niveau de l'excellence.

Le rôle d'un manuel de classe préparatoire n'est pas évident. Les étudiants disposent déjà de leurs notes de cours, et parfois de polycopiés, provenant d'enseignants fort compétents. Mais chacun sait qu'on observe mieux une statue et qu'on en apprécie mieux la beauté en la regardant sous différents angles ; il en est de même des disciplines scientifiques dans lesquelles une diversité d'approches ne peut que faciliter la compréhension et l'assimilation de notions a priori abstraites et difficiles. En ce sens, les ouvrages de la collection « Vuibert Prépas » constituent une aide conséquente pour les élèves de CPGE scientifiques.

À lire ces ouvrages, que ce soit dans les disciplines qui sont les miennes, Mathématiques et Informatique ou dans des disciplines qui me sont moins familières comme la Physique, la Chimie ou les Sciences de l'Ingénieur, je ne peux être qu'admiratif devant le talent des auteurs de toutes origines qui, dans des délais très courts, ont eu à cœur de faire passer leur amour pour la science et pour son enseignement.

Je suis certain que le public préparationnaire partagera mon enthousiasme pour cette collection qui marque le retour des éditions Vuibert au service de ces filières.

Denis Monasse

Chapitre 5

Convexité

Dans tout ce chapitre, E désigne un espace vectoriel sur le corps des réels.

1. Géométrie affine dans un espace vectoriel réel

1.1. Points et vecteurs

Les éléments de l'espace vectoriel E peuvent être considérés tantôt comme des *points*, tantôt comme des *vecteurs* reliant deux points. Si deux éléments a et b de E sont notés comme des points A et B, on définit le vecteur $\overrightarrow{AB} = b - a$. On pourra écrire $B = A + \overrightarrow{AB}$, mais on n'écrira jamais de somme ou de différence de deux points.

Comme points et vecteurs sont éléments d'un même ensemble, cette distinction est purement subjective. Elle permet d'avoir une vision géométrique dans laquelle tous les points jouent le même rôle, tandis qu'il existe un vecteur particulier : le vecteur nul. Le choix d'une *origine* O, qui peut être quelconque, permet de modifier à volonté la correspondance point/vecteur, en identifiant un point M et le vecteur $\overrightarrow{OM}$.

1.2. Sous-espace affine de E

Définition 5.1. Sous-espace affine

Une partie F de E est appelée *sous-espace affine* de E s'il existe un sous-espace vectoriel F' de E tel que :

- $\forall (A,B) \in F^2,\ \overrightarrow{AB} \in F'$
- $\forall A \in F,\ \forall x \in F',\ A + x \in F$

Le sous-espace vectoriel F' est appelé *direction* du sous-espace affine F, ou *espace vectoriel sous-jacent* à F.

Remarque

Un sous-espace affine non nul F est défini par un point $O \in F$ et sa direction F'.

Exemples

- Si A et B sont deux points distincts, la droite (AB) est le sous-espace affine passant par A, de direction Vect$(\overrightarrow{AB})$.
- Si A, B, C sont trois points non alignés, le plan (ABC) est le sous-espace affine passant par A, de direction Vect$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.
- Nous verrons dans le chapitre 18 que l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire est un sous-espace affine de l'espace des fonctions, défini par une solution particulière et admettant pour direction l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée.

2. Barycentres

Dans la suite du chapitre, les éléments de E seront toujours appelés points.

2.1. Barycentre d'un système de points pondérés

Définition 5.2. Point pondéré d'un espace vectoriel réel

On appelle *point pondéré* (x, α) un élément de $E \times \mathbb{R}$. Le réel α est appelé *coefficient* (ou, dans les applications en physique, *masse*) du point pondéré (x, α) .

Définition 5.3. Barycentre d'un système de points pondérés

Soit $(x_i, \alpha_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ une famille finie de points pondérés de E dont la somme des coefficients $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i$ est non nulle. On appelle *barycentre* de la famille (x_i, α_i) le point g de E défini par :

$$g = \frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i}$$

Si tous les coefficients sont égaux, G est appelé *isobarycentre* de la famille.

Remarque

En notation affine, la relation définissant le barycentre G de la famille (A_i, α_i) :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{OA_i}}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i}$$

est indépendante du point O choisi. Elle équivaut à :

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = 0$$

Exemples

- Si A et B sont deux points distincts :
  – l'isobarycentre de (A, B) est le milieu du segment $[AB]$.

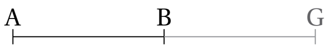
  $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = \vec{0}$; $\quad \overrightarrow{OG} = \dfrac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}$

  – le barycentre de $\big((A,1),(B,2)\big)$ est le point qui partage le segment $[AB]$ aux 2/3.

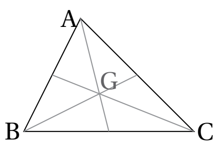
  $\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} = \vec{0}$; $\quad \overrightarrow{OG} = \dfrac{\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB}}{3}$

  – le barycentre du système $\big((A,1),(B,-2)\big)$ est le symétrique de A par rapport à B.

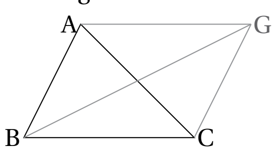
  $\overrightarrow{GA} - 2\overrightarrow{GB} = \vec{0}$; $\quad \overrightarrow{OG} = -\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB}$

- Si A, B, C sont trois points non alignés :
  – l'isobarycentre de (A, B, C) est le point de concours des trois médianes du triangle ABC.

  $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$; $\quad \overrightarrow{OG} = \dfrac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3}$

  – le barycentre du système $\big((A,1),(B,-1),(C,1)\big)$ est le point G tel que $AGCB$ soit un parallélogramme.

  $\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$; $\quad \overrightarrow{OG} = \dfrac{\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3}$

- Si $\dim(E) = 3$ et si A, B, C, D sont quatre points non coplanaires, tout point de E est barycentre de ces points affectés de coefficients convenablement choisis.

Application (En physique ou en sciences de l'ingénieur)

Si (A_i) est un système de points matériels, de masses respectives (m_i), le barycentre de la famille (A_i, m_i) est appelé *centre de masse* ou *centre de gravité* du système. C'est le point d'application de la résultante des poids des points du système. Si ces points sont reliés par des tiges rigides de masses négligeables, c'est le point où il faut suspendre le système (ou le poser sur une pointe) pour qu'il tienne en équilibre.

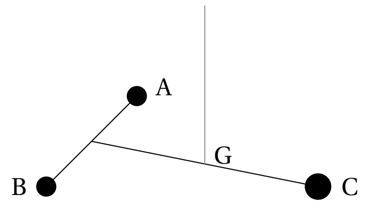


Figure 5.1. Ici, $m_A = m_B = 1g$; $m_C = 2g$. Le système est suspendu au point G, barycentre du système $((A,1),(B,1),(C,2))$. C'est le milieu du segment joignant C au milieu de $[AB]$.

La théorie de l'intégration permet de généraliser cette notion à un ensemble infini de points matériels formant un solide.

Proposition 5.1.

Soit $(A_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ une famille finie de points de E. L'ensemble des barycentres de ces points affectés de masses quelconques de somme non nulle est le plus petit sous-espace affine contenant tous ces points.

Démonstration

Soit $F' = \text{Vect}\left(\overrightarrow{A_iA_j},\ (i,j)\in[\![1,n]\!]^2\right)$. Il est clair que :

- Si G et G' sont deux barycentres des points A_i, $\overrightarrow{GG'} \in F'$.
- Si G est un barycentre des points A_i et $\vec{x} \in F'$, alors $G + \vec{x}$ est encore un barycentre des A_i.

L'ensemble des barycentres des points A_i est donc bien un sous-espace affine de E. De plus, tout sous-espace affine de E contenant tous les points A_i contient nécessairement tous les barycentres de ces points.

2.2. Propriétés des barycentres

Dans la suite du chapitre, les éléments de E seront toujours appelés points.

Proposition 5.2.

1. *Commutativité*
   Le barycentre d'un système est indépendant de l'ordre des points pondérés.
2. *Homogénéité*
   Le barycentre d'un système est inchangé si l'on multiplie toutes les masses par un même réel non nul.
3. *Associativité*
   Le barycentre d'un système est inchangé si l'on remplace un sous-système de masse totale non nulle par son barycentre partiel affecté de cette masse.

Démonstration

1. La commutativité est évidente.
2. Le barycentre est inchangé si l'on remplace, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, α_i par $\lambda\alpha_i$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$.
3. Soit $(x_i,\alpha_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ un système de points pondérés de masse $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i \neq 0$ et de barycentre g. On suppose que $n \geqslant 2$. Soit un sous-système de p points pondérés de masse non nulle ($1 \leqslant p \leqslant n-1$). En permutant les points pondérés, on peut considérer qu'il s'agit des p premiers : $\sum_{i=1}^{p}\alpha_i \neq 0$. Soit h le barycentre du sous-système $(x_i,\alpha_i)_{i\in[\![1,p]\!]}$.

$$\sum_{i=1}^{p}\alpha_i x_i = \left(\sum_{i=1}^{p}\alpha_i\right)h$$

Or :

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right)g = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i = \sum_{i=1}^{p}\alpha_i x_i + \sum_{i=p+1}^{n}\alpha_i x_i = \left(\sum_{i=1}^{p}\alpha_i\right)h + \sum_{i=p+1}^{n}\alpha_i x_i$$

ce qui prouve que g est le barycentre du système :

$$\left\{\left(h,\sum_{i=1}^{p}\alpha_i\right),(x_{p+1},\alpha_{p+1}),\cdots,(x_n,\alpha_n)\right\}$$

Application (Sept droites concourantes dans un tétraèdre)

Montrons que, dans un tétraèdre $(ABCD)$, les trois droites joignant les milieux de deux côtés opposés ainsi que les quatre droites joignant un sommet au centre de gravité de la face opposée sont toutes les sept concourantes.

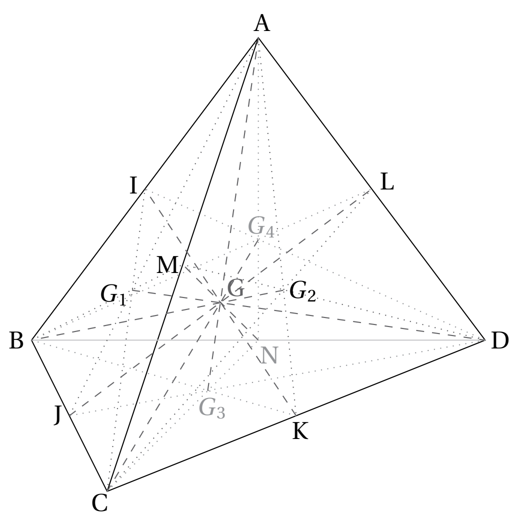


Figure 5.2. Un tétraèdre et les sept droites concourantes en son isobarycentre.

Il suffit de remarquer que l'isobarycentre de A, B, C, D est à la fois l'isobarycentre des milieux de deux côtés opposés, et le barycentre d'un sommet affecté de la masse 1 et de l'isobarycentre des trois autres affecté de la masse 3.

3. Parties convexes d'un espace vectoriel réel

3.1. Segment

Définition 5.4. Segment

Étant donné deux points x et y de E, on appelle *segment* $[x,y]$ l'ensemble des barycentres de x et y affectés de coefficients positifs. En ramenant la somme des coefficients à 1, on peut dire que $[x,y]$ est l'ensemble des barycentres des systèmes $\{(x,\lambda),(y,1-\lambda)\}$ où $\lambda \in [0,1]$, c'est-à-dire :

$$[x,y] = \{\lambda x + (1-\lambda)y,\ \lambda \in [0,1]\}$$

Remarque

Si $E=\mathbb{R}$, on retrouve la définition d'un segment de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire un intervalle fermé borné. Pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tel que $x \leqslant y$, par définition, $[x,y] = \{z\in\mathbb{R},\ x \leqslant z \leqslant y\}$. Attention, si $x > y$, alors $\{z\in\mathbb{R},\ x \leqslant z \leqslant y\} = \varnothing$. Il faut écrire : $\{z\in\mathbb{R},\ y \leqslant z \leqslant x\}$.

3.2. Partie convexe de E

Définition 5.5. Partie convexe

Une partie X de E est dite *convexe* si, dès qu'elle contient deux points x et y, elle contient le segment $[x,y]$.

$$\forall (x,y)\in X^2, \quad [x,y] \subset X$$

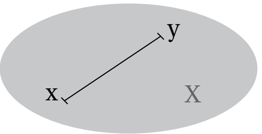


Figure 5.3. Une partie convexe du plan.

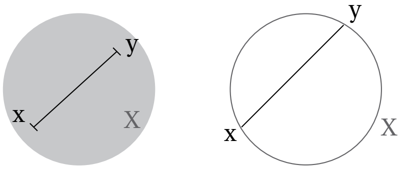


Figure 5.4. Dans le plan, un disque est convexe, un cercle ne l'est pas.

Exemples

- Les parties convexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.
- Un sous-espace affine est convexe.
- Une demi-droite, un demi-plan sont convexes.
- Si E est muni d'une norme, la boule fermée $\{x,\ \|x\| \leqslant R\}$ est convexe.
- En revanche, la sphère $\{x,\ \|x\| = R\}$, avec $R > 0$, n'est pas convexe.

Proposition 5.3.

L'intersection d'une famille quelconque de convexes est convexe.

Démonstration

Soit $(C_i)_{i\in I}$ une famille de convexes et $C = \bigcap\limits_{i\in I} C_i$ son intersection. Soit $(x,y)\in C^2$; alors, pour tout $i\in I$: $(x,y)\in C_i^2$, donc $[x,y]\subset C_i$. En définitive, $[x,y]\subset C$, donc C est convexe.

3.3. Stabilité par barycentration à coefficients positifs

Proposition 5.4.

Une partie X de E est convexe si et seulement si elle est stable par barycentration à coefficients positifs, c'est-à-dire si le barycentre de toute famille finie $(x_i,\alpha_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ de points pondérés de X, avec pour tout $i\in I$, $\alpha_i \geqslant 0$ et $\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i > 0$, appartient à X.

Démonstration

Si X est stable par barycentration à coefficients positifs, elle est en particulier convexe.

Réciproquement, soit X une partie convexe. Montrons par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 2$, X est stable par barycentration à coefficients positifs de n points.

- Pour $n = 2$, on retrouve la définition d'une partie convexe.
- Soit $n \geqslant 2$ tel que, pour toute famille de n points pondérés de X à coefficients positifs non tous nuls, le barycentre appartient à X. Soit alors $(x_i,\alpha_i)_{i\in[\![1,n+1]\!]}$ une famille de $n+1$ points pondérés de X à coefficients positifs. Si $\alpha_1,\dots,\alpha_n = 0$, le barycentre est x_{n+1}, qui appartient bien à X. Sinon, on ne change pas le barycentre du système en remplaçant les n premiers points par leur barycentre partiel, qui appartient à X d'après l'hypothèse de récurrence, affecté du coefficient $\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i$ qui est strictement positif. On est donc ramené au barycentre de deux points affectés de coefficients positifs : il appartient à X.

4. Fonctions convexes d'une variable réelle

4.1. Fonction convexe de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

Rappel (Graphe, épigraphe)
Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie sur un intervalle I.
On appelle *graphe* de f l'ensemble $\Gamma_f = \{(x,y) \in I \times \mathbb{R},\ y = f(x)\}$.
On appelle *épigraphe* de f l'ensemble $\Gamma_f^+ = \{(x,y) \in I \times \mathbb{R},\ y \geqslant f(x)\}$, c'est-à-dire l'ensemble des points situés *au-dessus* du graphe de f.

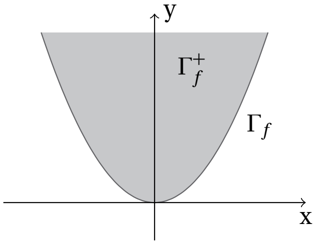


Figure 5.5. Graphe et épigraphe de la fonction $x \mapsto x^2$.

Définition 5.6. Fonction convexe

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie sur un intervalle I. On dit que f est *convexe* sur I si :

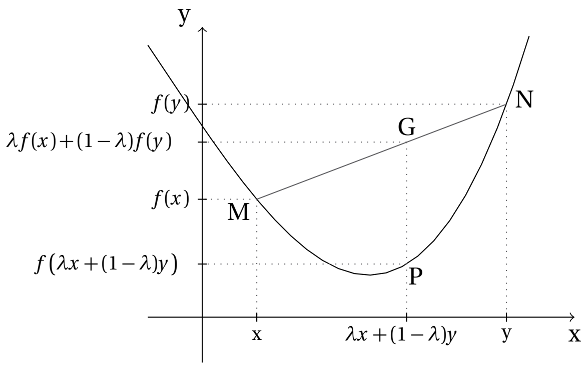
$$\forall (x,y) \in I^2, \quad \forall \lambda \in [0,1], \quad f\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

Remarque
Cette définition exprime le fait que l'image par f du barycentre de deux points de I à coefficients positifs est inférieure ou égale au barycentre des images de ces deux points.

Proposition 5.5.

Une fonction est convexe si et seulement si tout arc de son graphe est situé en dessous de la corde correspondante.

Démonstration
Soit f une fonction définie sur un intervalle I, de graphe Γ_f. Soit M et N les points de Γ_f de f d'abscisses respectives x et y. Soit G le barycentre du système $(M,\lambda),(N,1-\lambda)$. Les coordonnées de G sont $\big(\lambda x + (1-\lambda)y\ ,\ \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)\big)$. Soit P et G les points d'abscisse $\lambda x + (1-\lambda)y$ respectivement sur la corde et sur l'arc correspondant. L'ordonnée de P est $f\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big)$. Par définition, f est convexe si et seulement si, quels que soient M, N et λ, le point P est situé en dessous du point G.

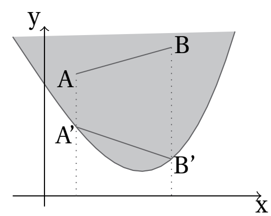


Corollaire 5.6.

Une fonction est convexe si et seulement si son épigraphe est convexe.

Démonstration

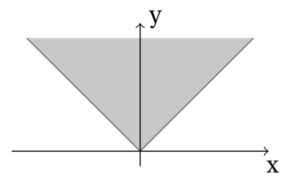
Supposons f convexe. Soit $(A,B)\in\Gamma_f^{+2}$ et soit A', B' les points du graphe de f de mêmes abscisses respectives que A et B. Le segment $[AB]$ est au-dessus de la corde $[A'B']$ donc *a fortiori* au-dessus de l'arc correspondant. $[AB]\subset\Gamma_f^+$, donc Γ_f^+ est convexe.



Réciproquement, si Γ_f^+ est convexe, toute corde est au-dessus de l'arc correspondant : la fonction est convexe sur $\mathbb{R}$.

Exemple

La fonction valeur absolue $x\mapsto|x|$ est convexe. Son épigraphe est l'intersection de deux demi-plans : il est convexe.

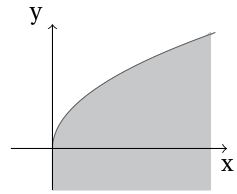


Vocabulaire

Une fonction est dite *concave* si son opposée est convexe. Toutes les propriétés sont inversées : tout arc est *au-dessus* de sa corde. La région du plan située *en dessous* du graphe de f est convexe.

Exemple

La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est concave sur $\mathbb{R}_+$.



4.2. Généralisation : Inégalité de Jensen

Proposition 5.7. Inégalité de Jensen

Soit f une fonction convexe sur un intervalle I.

$$\forall n \geqslant 2,\ \ \forall (x_1,\dots,x_n) \in I^n,\ \ \forall (\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in \mathbb{R}_+^n,\quad \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \Rightarrow f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$$

Démonstration

Si f est convexe, son épigraphe est convexe, donc stable par barycentration à coefficients positifs. Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, le point A_i de coordonnées $\big(x_i, f(x_i)\big)$ appartient à l'épigraphe, donc le barycentre du système (A_i, λ_i), de coordonnées $\big(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i, \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)\big)$ appartient à l'épigraphe, c'est-à-dire :

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$$

4.3. Croissance des pentes des sécantes dont une extrémité est fixée

Proposition 5.8.

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie sur un intervalle I non vide et non réduit à un singleton.
f est convexe sur I si et seulement si, pour tout $x \in I$, la fonction Φ_x :

$$t \mapsto \frac{f(t) - f(x)}{t - x}$$

est croissante sur $I \backslash \{x\}$.

Démonstration

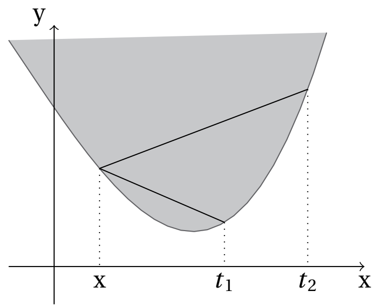
- Supposons f convexe sur I. Soit $x \in I$ et t_1, t_2 deux éléments de $I \backslash \{x\}$. Supposons pour fixer les idées que $x < t_1 < t_2$. On peut poser $t_1 = \lambda x + (1-\lambda) t_2$ avec $\lambda \in]0,1[$. Comme f est convexe :

$$f(t_1) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(t_2)$$

$$\text{d'où : } \quad f(t_1)-f(x) \leqslant (1-\lambda)\big(f(t_2)-f(x)\big)$$

$$\text{or, } \quad t_1-x=(1-\lambda)(t_2-x) \quad \text{et} \quad t_1-x>0$$

$$\text{d'où : } \quad \frac{f(t_1)-f(x)}{t_1-x} \leqslant \frac{f(t_2)-f(x)}{t_2-x}$$



La démonstration est pratiquement la même lorsque $t_1<x<t_2$ ou $t_1<t_2<x$.
On en déduit que l'application Φ_x est croissante sur $I\backslash\{x\}$.

- Réciproquement, supposons que l'application Φ_x soit croissante quel que soit $x\in I$.
Soit $(x,y)\in I^2$ avec $x<y$, et $\lambda\in]0,1[$. Posons $z=\lambda x+(1-\lambda)y$, d'où $x<z<y$.

$$\frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leqslant \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$$

$$\text{d'où : } \quad f(z)\leqslant f(x)+\frac{z-x}{y-x}\big(f(y)-f(x)\big)$$

$$\text{or, } \quad \frac{z-x}{y-x}=1-\lambda, \quad \text{d'où : } \quad f(z)\leqslant f(x)+(1-\lambda)\big(f(y)-f(x)\big)$$

$$\text{et enfin : } \quad f(z)\leqslant \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$$

Cette inégalité est évidente pour $\lambda=0$ ou 1 ; elle est donc établie pour tout $\lambda\in[0,1]$, par conséquent f est convexe.

Remarque

Graphiquement, cette propriété signifie que la pente d'une sécante dont on fixe une extrémité est une fonction croissante de l'autre extrémité.

De même, f est concave si et seulement si cette même application est décroissante.

Corollaire 5.9.

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie sur un intervalle I **ouvert** non vide et non réduit à un singleton. Si f est convexe sur I, elle est dérivable à gauche et à droite en tout point de I, donc *a fortiori* continue sur I. De plus, pour tout $(x,y)\in I^2$ tel que $x<y$:

$$f'_g(x)\leqslant f'_d(x)\leqslant \frac{f(y)-f(x)}{y-x}\leqslant f'_g(y)\leqslant f'_d(y)$$

Démonstration

Soit $x \in I$. L'application Φ_x de $I\setminus\{x\}$ dans $\mathbb{R}$: $t \mapsto \dfrac{f(t)-f(x)}{t-x}$ étant croissante, elle admet une limite à gauche et une limite à droite en x (car x n'est pas une borne de I) et :

$$\lim_{t\to x-} \frac{f(t)-f(x)}{t-x} \leqslant \lim_{t\to x+} \frac{f(t)-f(x)}{t-x}$$

Donc f est dérivable à gauche et à droite en x et $f'_g(x) \leqslant f'_d(x)$.
Soit $(x,t,y) \in I^3$ tel que $x<t<y$. Comme Φ_x est croissante, $\Phi_x(t) \leqslant \Phi_x(y)$, c'est-à-dire :

$$\frac{f(t)-f(x)}{t-x} \leqslant \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$$

En faisant tendre t vers x, on obtient : $f'_d(x) \leqslant \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}$.
De même, Φ_y étant croissante, $\Phi_y(x) \leqslant \Phi_y(t)$, c'est-à-dire :

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} \leqslant \frac{f(t)-f(y)}{t-y}$$

En faisant tendre t vers y, on obtient : $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} \leqslant f'_g(y)$. D'où l'inégalité attendue.

Remarque

Il est important de remarquer que, si l'intervalle I n'est pas ouvert, une fonction convexe (ou concave) sur I n'est pas nécessairement dérivable à droite ou à gauche en une borne de I. Par exemple, la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est concave sur $[0,+\infty[$, mais elle n'est pas dérivable à droite en 0. Ici, $\lim_{t\to 0+} \Phi_0(t) = +\infty$.

5. Fonctions convexes dérivables, deux fois dérivables

5.1. Fonctions convexes dérivables

Proposition 5.10.

Une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dérivable sur un intervalle I, est convexe sur I si et seulement si sa dérivée est croissante sur I.

Démonstration

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- Supposons f convexe sur I. Soit $(x,y) \in I^2$ avec $x<y$. D'après le corollaire 5.9 :

$$f'(x) \leqslant \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant f'(y)$$

Donc f' est croissante sur I.

- Supposons f' croissante sur I. Soit $(x, y) \in I^2$ tel que $x < y$ et $y = mx + p$ l'équation de la droite joignant les points d'abscisses x et y du graphe de f. Soit g la fonction définie par $g(t) = f(t) - (mt + p)$ pour $t \in I$.
  g est dérivable sur $[x, y]$ et $g'(t) = f'(t) - m$. D'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]x, y[$ tel que $f'(c) = m$, c'est-à-dire $g'(c) = 0$. La fonction g' étant croissante, elle est négative sur $[x, c]$ et positive sur $[c, y]$. D'où les variations de g.

t	x		c		y
g'		$-$	0	$+$	
g	0	$\searrow$		$\nearrow$	0

  La fonction g est donc toujours négative : la courbe est en dessous de sa corde, f est donc convexe sur I.

Remarque
De même, une fonction dérivable est concave sur I si et seulement si sa dérivée est décroissante sur I.

Exemples
- La fonction exponentielle $x \mapsto e^x$ est convexe sur $\mathbb{R}$, puisque sa dérivée est croissante.
- La fonction logarithme népérien $x \mapsto \ln x$ est concave sur $\mathbb{R}_+^*$, puisque sa dérivée est décroissante.

5.2. Fonctions convexes deux fois dérivables

Corollaire 5.11.
Une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ deux fois dérivable sur un intervalle I est convexe sur I si et seulement si sa dérivée seconde est positive sur I.

Démonstration
Sur l'intervalle I : f' est croissante si et seulement si f'' est positive.

Remarque
De même, cette fonction est concave sur I si et seulement si sa dérivée seconde est négative sur I.

Définition 5.7. Point d'inflexion
En un point où la dérivée seconde s'annule en changeant de signe, le graphe change de concavité : on dit qu'il s'agit d'un *point d'inflexion*.

5.3. Position par rapport à une tangente

Proposition 5.12.

Le graphe d'une fonction convexe dérivable sur un intervalle I est au-dessus de chacune de ses tangentes.

Démonstration

Soit f une fonction convexe dérivable sur I. Une équation de la tangente au graphe de f en un point x_0 est $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.
Posons $h(x) = f(x) - \big(f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)\big)$. La fonction h est dérivable sur I et, pour tout $x \in I$, $h'(x) = f'(x) - f'(x_0)$. f' étant croissante sur I, les variations de h sont données par le tableau suivant.

x		x_0	
h'	$-$	0	$+$
h	$\searrow$		$\nearrow$
		0	

On en déduit que h est toujours positive : le graphe est au-dessus de sa tangente.

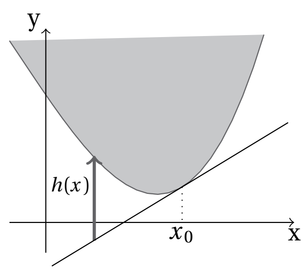


Figure 5.6. Le graphe d'une fonction convexe dérivable sur un intervalle I est au-dessus de ses tangentes.

Remarque

De même, le graphe d'une fonction concave dérivable sur I est en dessous de ses tangentes. En un point d'inflexion, le graphe traverse sa tangente.

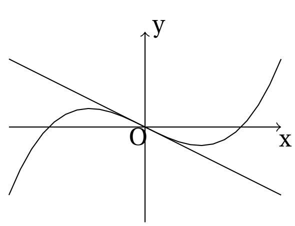


Figure 5.7. Un point d'inflexion en 0. Sur $\mathbb{R}_-$, la fonction est concave, le graphe est en dessous de la tangente en 0. Sur $\mathbb{R}_+$, la fonction est convexe, le graphe est au-dessus de la tangente en 0.

Synthèse et méthodes

Convexité

Barycentres

Pour placer le barycentre g du système $(x_i,\alpha_i)_{i[\![1,n]\!]}$, avec $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i \neq 0$:

- On peut utiliser la définition : $g = \left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i\right) \Big/ \left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right)$

  ou, en notation affine : $\overrightarrow{OG} = \left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i \overrightarrow{OA_i}\right) \Big/ \left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right)$.
- On peut regrouper des sous-familles de masse non nulle en les remplaçant par leur barycentre partiel.

Pour utiliser le barycentre g d'un système $(x_i,\alpha_i)_{i[\![1,n]\!]}$, avec $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i \neq 0$:

- On peut remplacer $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i$ par $\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right) g$.
- On peut remplacer $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(x_i - g)$ par 0.

Parties convexes

Pour montrer qu'une partie X d'un espace vectoriel réel est convexe :

- On peut montrer que, pour tous points x et y de X, $[x,y] \subset X$.
- On peut montrer que X est une intersection de parties convexes.

Pour utiliser l'hypothèse qu'une partie est convexe :

- On peut affirmer que, pour tous points x et y de X, $[x,y] \subset X$.
- On peut affirmer que X est stable par barycentration à coefficients positifs.

Fonctions convexes

Pour montrer qu'une fonction f est convexe sur un intervalle I :

- On peut montrer que, pour tout $(x,y) \in I^2$ et pour tout $\lambda \in [0,1]$:

$$f\left(\lambda x + (1-\lambda)y\right) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y))$$

- On peut montrer que f est une somme de fonctions convexes.
- Si l'on sait que f est dérivable, on peut montrer que sa dérivée est croissante.
- Si l'on sait que f est deux fois dérivable, on peut montrer que sa dérivée seconde est positive.

…

Pour utiliser l'hypothèse qu'une fonction f est convexe :

- On peut utiliser la convexité de l'épigraphe de f.
- On peut utiliser l'inégalité de Jensen.
- On peut utiliser la croissance des pentes d'une sécante au graphe dont une extrémité est fixée.
- Si l'intervalle I est ouvert, on peut affirmer que f est continue, dérivable à gauche et à droite en tout point de I.
- Si l'on sait que f est dérivable, on peut affirmer que son graphe est au-dessus de chacune de ses tangentes.

Inégalités de convexité

Pour démontrer une inégalité, on peut chercher une fonction convexe dont l'expression de la convexité, par l'intermédiaire de la définition ou de l'inégalité de Jensen, équivaut à l'inégalité cherchée.

Exemples

- Inégalité arithmético-géométrique :

$$\forall (x_1,\dots,x_n)\in {\mathbb{R}_+^*}^n,\quad \sqrt[n]{x_1\cdots x_n}\leqslant \frac{x_1+\cdots+x_n}{n}$$

- Lemme de Hölder :

$$\forall (x,y)\in \mathbb{R}_+^{*2},\quad \forall (p,q)\in]1,+\infty[^2 \quad \text{avec} \quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,\quad xy\leqslant \frac{x^p}{p}+\frac{y^q}{q}$$

- Inégalité de Hölder :

$$\forall (a_i)\in \mathbb{R}_+^{*n},\quad \forall (b_i)\in \mathbb{R}_+^{*n},\quad \forall (p,q)\in]1,+\infty[^2 \quad \text{avec} \quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^n {a_i}^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^n {b_i}^q\right)^{1/q}$$

- Inégalité de Minkowski :

$$\forall p\in [1,+\infty[,\quad \forall (a_i)_{i\in[\![1,n]\!]}\in \mathbb{R}_+^n,\quad \forall (b_i)_{i\in[\![1,n]\!]}\in \mathbb{R}_+^n,$$

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i^{1/p}\right)^p + \left(\sum_{i=1}^n b_i^{1/p}\right)^p \leqslant \left(\sum_{i=1}^n (a_i+b_i)^{1/p}\right)^p$$

Exercices

Convexité

Vrai ou faux ?

		Vrai	Faux
a)	Tout point d'une droite (AB), avec $A \neq B$, est un barycentre de A et B.	☐	☐
b)	Le système $\{(A,2),(B,-1),(C,-1)\}$ possède un barycentre unique.	☐	☐
c)	La réunion de deux parties convexes est convexe.	☐	☐
d)	L'intersection d'une famille infinie de parties convexes est convexe.	☐	☐
e)	Une partie C telle que, pour tout $(A,B) \in C^2$, le milieu de $[AB]$ appartient à C est convexe.	☐	☐
f)	Le graphe d'une fonction convexe est convexe.	☐	☐
g)	Une fonction convexe sur un intervalle ouvert est continue sur cet intervalle.	☐	☐
h)	Une fonction convexe sur un intervalle ouvert est dérivable sur cet intervalle.	☐	☐
i)	Une fonction convexe sur un intervalle quelconque est dérivable à droite en tout point de cet intervalle.	☐	☐
j)	Si f est une fonction deux fois dérivable, son graphe présente un point d'inflexion en tout point où la dérivée seconde de f s'annule.	☐	☐

Exercices

●○○ **Exercice 1**

Montrer que, pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{2}]$, $\quad \frac{2}{\pi} \leqslant \frac{\sin x}{x} \leqslant 1$.

●○○ **Exercice 2**

Soit f une fonction convexe majorée sur $\mathbb{R}$. Démontrer que f est constante.

●○○ Exercice 3

Soit f une fonction concave de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$. Démontrer que :

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}_+^2, \quad f(x+y)\leqslant f(x)+f(y)$$

●●○ Exercice 4

Soit f une fonction réelle deux fois dérivable sur un intervalle I, à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. Pour tout réel a, on considère la fonction g_a définie sur I par : $g_a(x)=e^{ax}f(x)$.
Montrer que la fonction $\ln f$ est convexe si et seulement si, pour tout $a\in\mathbb{R}$, la fonction g_a est convexe.

●●○ Exercice 5

1) Montrer que la fonction $x\mapsto \ln(1+\mathrm{e}^x)$ est convexe sur $\mathbb{R}$.
2) En déduire que, pour toute famille finie $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ de réels strictement positifs :

$$1+\prod_{k=1}^{n}(x_k)^{\frac{1}{n}} \leqslant \prod_{k=1}^{n}(x_k+1)^{\frac{1}{n}}$$

3) Démontrer que, pour tout entier n strictement positif :

$$a)\quad 1+n!^{\frac{1}{n}}\leqslant (n+1)!^{\frac{1}{n}}$$

$$b)\quad 1+\frac{1}{n!^{\frac{1}{n}}}\leqslant (n+1)^{\frac{1}{n}}$$

●●○ Exercice 6

Soit f la fonction définie par : $\qquad f(x)=\displaystyle\int_x^{x^2}\frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$

1) Démontrer que :

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^*\setminus\{1\}, \quad \forall t\in[1,x^2], \quad \frac{2\ln x}{x^2-1}(t-1)\leqslant \ln t\leqslant t-1$$

2) En déduire que f admet une limite finie au point 1.
3) Montrer que la fonction f, prolongée par continuité en 1, est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer sa dérivée.
4) Déterminer un développement limité à l'ordre 3 de f au voisinage de 1.

●●● Exercice 7 Enveloppe convexe. Lemme de Kakutani

Soit X une partie non vide d'un espace vectoriel réel E. On appelle *enveloppe convexe* de X l'intersection de tous les convexes contenant X. On la note $\mathrm{Conv}(X)$.

1) Montrer que $\mathrm{Conv}(X)$ est convexe.
2) Montrer que $\mathrm{Conv}(X)$ est l'ensemble des barycentres à coefficients positifs des points de X.
3) Soit C un convexe non vide et x un point n'appartenant pas à C. On désigne par Γ l'enveloppe convexe de $C\cup\{x\}$. Montrer qu'un point y appartient à Γ si et seulement si il existe un point z de C tel que y appartienne au segment $[x,z]$.
4) Soit C_1 et C_2 deux convexes non vides disjoints tels que $C_1\cup C_2\neq E$. Soit x un point de E qui n'appartient ni à C_1 ni à C_2. On désigne par Γ_1 et Γ_2 les enveloppes convexes respectives de $C_1\cup\{x\}$ et $C_2\cup\{x\}$. Montrer que l'une au moins des parties $C_1\cap\Gamma_2$ ou $C_2\cap\Gamma_1$ est vide.

Sujets de concours

●○○ Sujet A Oral X MP (Question subsidiaire pour juger du bon sens du candidat)

Une chaîne est constituée de maillons identiques de même masse. On sait que, suspendue entre deux points, la chaîne prend la forme d'une courbe justement appelée « chaînette » qui est semblable au graphe de la fonction *cosinus hyperbolique*. On saisit le point le plus bas de la chaîne pour la tendre jusqu'à ce qu'elle prenne la forme d'un triangle. Que devient le centre de gravité de la chaîne dans ce mouvement ? Monte-t-il, descend-il ou reste-t-il immobile ?

●●○ Sujet B Oral Mines MP

Soit f une fonction *continue* sur un intervalle I, telle que :

$$\forall (x,y)\in I^2, \quad f\left(\frac{x+y}{2}\right)\leqslant \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

Montrer que f est convexe sur I.

●●○ Sujet C Extrait de Mines-Ponts PSI 2011

1) Soit $\lambda\in]0,1[$ et $a,b\in\mathbb{R}^+$. Montrer que :

$$\lambda a+(1-\lambda)b\geqslant a^{\lambda}b^{1-\lambda}$$

On pourra introduire une certaine fonction auxiliaire dont on justifiera la concavité.
Montrer en outre que, pour tout réel $u>1$:

$$\big(\lambda a+(1-\lambda)b\big)^u\leqslant \lambda a^u+(1-\lambda)b^u$$

2) Soit $a,b\in\mathbb{R}^+$ et $\lambda\in]0,1[$. Montrer que :

$$(a+b)^{\lambda}\leqslant a^{\lambda}+b^{\lambda}$$

●●● Sujet D Extrait de ISFA 2006 (Institut de science financière et d'assurances)

Partie A

Soit F l'ensemble des fonctions Φ définies sur $I=]-1,+\infty[$, convexes et telles que, pour tout x de I :

$$\Phi(x+1)=\Phi(x)+\ln(x+1)$$

1) Montrer l'égalité $\Phi(x)=\Phi(x+n)-\ln\big((x+1)\cdots(x+n)\big)$ pour tout n entier strictement positif.
2) Montrer que, pour $x>0$:

$$\ln(x)\leqslant \Phi'_g(x)\leqslant \Phi'_d(x)\leqslant \ln(x+1)$$

3) En déduire que $\lim_{x\to+\infty}\big(\Phi'_d(x)-\Phi'_g(x)\big)=0$.
4) Démontrer que la fonction Φ est dérivable sur $]-1,+\infty[$.

Partie B

Soit la suite de fonctions définies sur $]-1,+\infty[$ par :

$$u_n(x)=x\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\quad (n\in\mathbb{N}^*)$$

1) Montrer que, pour tout $x \in I$, la série $\sum u_n(x)$ est convergente.
   On note $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$ la suite des sommes partielles et $S(x)$ la somme de la série.
2) Montrer que l'on peut écrire $S_n(x)$ sous la forme :

$$S_n(x) = \ln(n!) + x\ln(n+1) - \sum_{k=1}^{n} \ln(x+k)$$

   En déduire que les fonctions $x \mapsto S_n(x)$ sont convexes, puis que la fonction S est aussi convexe.
3) Montrer que la fonction S est un élément de F.
4) Montrer que, pour tout x de I, la suite $n \mapsto S(x+n) - x\ln(n+1) - \ln(n!)$ a pour limite 0.
5) Réciproque I.
   Soit f une fonction définie sur I telle que :

$$\begin{cases} f(x+1) = f(x) + \ln(x+1) \\ \lim\limits_{n \to +\infty} \big(f(x+n) - x\ln(n+1) - \ln(n!)\big) = 0 \end{cases}$$

   Montrer que f est égale à S.
6) Réciproque II.
   Soit f une fonction définie sur I telle que :

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(x+1) = f(x) + \ln(x+1) \\ f \text{ est convexe} \end{cases}$$

   Montrer que f est égale à S.
   Indication : Démontrer que f et S sont dérivables et comparer leurs dérivées.
   (Si vous n'avez pas encore étudié la dérivation des séries de fonctions, dans le chapitre 12, vous pourrez admettre que S est dérivable sur I et que $S'(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} S'_n(x)$.)

Corrigés

Convexité

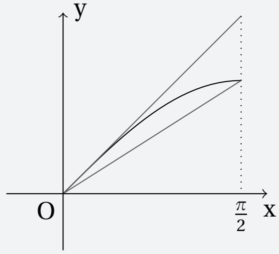
Corrigés des Vrai/Faux

a) Vrai.
b) Faux. La somme des coefficients est nulle.
c) Faux. Dans $\mathbb{R}$, $[0,1]\cup[2,3]$ n'est pas convexe.
d) Vrai.
e) Faux. L'ensemble $\mathbb{Q}$ n'est pas une partie convexe de $\mathbb{R}$.
f) Faux. On peut le dire de son épigraphe.
g) Vrai.
h) Faux. Exemple : $x \mapsto |x|$.
i) Faux. Exemple : $x \mapsto -\sqrt{x}$ est convexe sur $\mathbb{R}_+$ mais non dérivable à droite en 0.
j) Faux. Exemple : $x \mapsto x^4$. La dérivée seconde s'annule en 0 sans changer de signe, il n'y a pas d'inflexion.

Corrigés des exercices

Exercice 1

La fonction sin est deux fois dérivable sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et sa dérivée seconde, $-\sin$, est négative : elle est concave sur cet intervalle. Par conséquent, son graphe est au-dessus de la sécante et en dessous de la tangente au point $(0,0)$.



$$\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}], \quad \frac{2}{\pi}x \leqslant \sin x \leqslant x$$

D'où, pour $x > 0$: $\dfrac{2}{\pi} \leqslant \dfrac{\sin x}{x} \leqslant 1$

Exercice 2

Supposons qu'il existe $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que $a<b$ et $f(a)<f(b)$. Pour tout $x>b$, on aura :

$$\frac{f(x)-f(b)}{x-b} \geqslant \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

on en déduirait que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, en contradiction avec l'hypothèse. Même raisonnement si $f(a) > f(b)$, en considérant $x < a$ et en faisant tendre x vers $-\infty$.

Exercice 3

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$; alors $0 \leqslant x \leqslant x + y$. Appliquons la décroissance des pentes d'extrémité fixée en x :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} \geqslant \frac{f(x+y) - f(x)}{y}$$

D'où, comme x et y sont positifs : $y f(x) - y f(0) \geqslant x f(x+y) - x f(x)$, c'est-à-dire :

$$(1) \quad (x+y) f(x) \geqslant x f(x+y) + y f(0)$$

De même, en partant de $0 \leqslant y \leqslant x + y$, on aboutit à :

$$(2) \quad (x+y) f(y) \geqslant y f(x+y) + x f(0)$$

En ajoutant membre à membre les inégalités (1) et (2), on obtient :

$$(x+y)\big(f(x) + f(y)\big) \geqslant (x+y) f(x+y) + (x+y) f(0)$$

En divisant par $x + y$, qui est positif et que l'on peut supposer non nul puisque le cas $x = y = 0$ est évident, on a :

$$f(x) + f(y) \geqslant f(x+y) + f(0)$$

A fortiori, $f(x) + f(y) \geqslant f(x+y)$, puisque $f(0) \geqslant 0$.

Exercice 4

Supposons $\ln f$ convexe. Sa dérivée $\frac{f'}{f}$ est croissante, sa dérivée seconde $\frac{f''f - f'^2}{f^2}$ est positive. D'où :

$$\forall x \in I, \quad f''(x) f(x) - f'(x)^2 \geqslant 0$$

Calculons la dérivée seconde de g_a à l'aide de la formule de Leibniz :

$$\forall x \in I, \quad g_a''(x) = \big(a^2 f(x) + 2a f'(x) + f''(x)\big) e^{ax}$$

Pour x fixé, $a^2 f(x) + 2a f'(x) + f''(x)$ est un trinôme du second degré en a, dont le discriminant réduit est :

$$\Delta' = f'(x)^2 - f(x) f''(x)$$

D'après ce qui précède, ce discriminant est négatif : le trinôme garde donc un signe constant sur $\mathbb{R}$, celui de son coefficient dominant $f(x)$, c'est-à-dire positif. On en déduit :

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in I, \quad g_a''(x) \geqslant 0$$

donc g_a est convexe sur I.

Réciproquement, supposons que, quel que soit $a \in \mathbb{R}$, g_a soit convexe sur I. Alors g_a'' est positive ; pour tout $x \in I$, le trinôme $a^2 f(x) + 2a f'(x) + f''(x)$ garde un signe constant : il a donc au plus une racine réelle, son discriminant est négatif :

$$\forall x \in I, \quad f'(x)^2 - f(x) f''(x) \leqslant 0$$

On en déduit que la dérivée seconde de $\ln f$ est positive sur I : $\ln f$ est convexe.

Exercice 5

1) La fonction f définie par $f(x)=\ln(1+e^x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x)=\frac{e^x}{1+e^x}=1-\frac{1}{1+e^x}$$

La fonction $x \mapsto 1+e^x$ est croissante, $x \mapsto \dfrac{1}{1+e^x}$ est décroissante et, par conséquent, f' est croissante : f est convexe.

2) Appliquons l'inégalité de Jensen à la famille de réels $(\ln x_1, \ln x_2, \cdots, \ln x_n)$, avec des coefficients tous égaux à $\dfrac{1}{n}$:

$$\ln\left(1+\exp\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\ln x_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\ln\left(1+e^{\ln x_k}\right)$$

ce qui équivaut à :

$$\begin{aligned}
\ln\left(1+\prod_{k=1}^{n} e^{\frac{1}{n}\ln x_k}\right) &\leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\ln(x_k+1)\\
\ln\left(1+\prod_{k=1}^{n} x_k^{\frac{1}{n}}\right) &\leqslant \sum_{k=1}^{n}\ln(1+x_k)^{\frac{1}{n}}\\
1+\prod_{k=1}^{n} x_k^{\frac{1}{n}} &\leqslant \prod_{k=1}^{n}(1+x_k)^{\frac{1}{n}}
\end{aligned}$$

3) En choisissant pour tout $k \in [\![1,n]\!]$: $x_k=k$, on obtient :

$$1+n!^{\frac{1}{n}} \leqslant (n+1)!^{\frac{1}{n}}$$

En choisissant $x_k=\dfrac{1}{k}$:

$$1+\frac{1}{n!^{\frac{1}{n}}} \leqslant \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{n}}$$

ce qui équivaut à :

$$\begin{aligned}
1+\frac{1}{n!^{\frac{1}{n}}} &\leqslant \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{k+1}{k}\right)^{\frac{1}{n}}\\
1+\frac{1}{n!^{\frac{1}{n}}} &\leqslant (n+1)^{\frac{1}{n}}
\end{aligned}$$

Exercice 6

1) La fonction ln étant concave, son graphe sur l'intervalle $[1,x^2]$ est compris entre la corde et la tangente au point d'abscisse 1 :

$$\forall t \in [1,x^2], \qquad \frac{2\ln x}{x^2-1}(t-1) \leqslant \ln t \leqslant t-1$$

2) La fonction $x \mapsto 1/x$ étant décroissante aussi bien sur $\mathbb{R}_-^*$ que sur $\mathbb{R}_+^*$, on a, pour tout x strictement positif différent de 1 :

$$\forall t \in [1, x^2], \quad \frac{1}{t-1} \leqslant \frac{1}{\ln t} \leqslant \frac{x^2-1}{2\ln x}\frac{1}{t-1}$$

En supposant $x > 1$ et en intégrant sur $[x, x^2]$:

$$\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{t-1} \leqslant \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} \leqslant \frac{x^2-1}{2\ln x}\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{t-1}$$

C'est-à-dire :

$$\ln(x+1) \leqslant f(x) \leqslant \frac{x^2-1}{2\ln x}\ln(x+1)$$

Comme $\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{x-1}{\ln x} = 1$, on obtient $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \ln 2$.
En supposant $x < 1$ et en intégrant sur $[x^2, x]$:

$$\int_{x^2}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{t-1} \leqslant \int_{x^2}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} \leqslant \frac{x^2-1}{2\ln x}\int_{x^2}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{t-1}$$

C'est-à-dire :

$$-\ln(x+1) \leqslant -f(x) \leqslant -\frac{x^2-1}{2\ln x}\ln(x+1)$$

Comme ci-dessus, on obtient $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \ln 2$. En définitive :

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \ln 2$$

3) Si F est une primitive de $t \mapsto \frac{1}{\ln t}$, pour tout $x \neq 1$, $f(x) = F(x^2) - F(x)$, d'où $f'(x) = \frac{x-1}{\ln x}$. D'après le théorème de la limite d'une dérivée, f est aussi dérivable en 1 et $f'(1) = 1$.

4) Écrivons le développement limité de f' à l'ordre 2 :

$$f'(1+h) \underset{0}{=} \frac{h}{\ln(1+h)} \underset{0}{=} \frac{1}{1 - \frac{h}{2} + \frac{h^2}{3} + o(h^2)} \underset{0}{=} 1 + \frac{h}{2} - \frac{h^2}{3} + \frac{h^2}{4} + o(h^2) \underset{0}{=} 1 + \frac{h}{2} - \frac{h^2}{12} + o(h^2)$$

D'où, en intégrant terme à terme, sans oublier la valeur $f(1)$ trouvée à la question 2 :

$$f(1+h) \underset{0}{=} \ln 2 + h + \frac{h^2}{4} - \frac{h^3}{36} + o(h^3)$$

Exercice 7

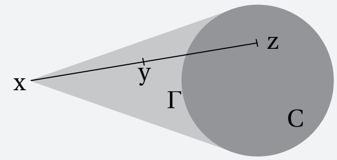
1) L'ensemble $\mathrm{Conv}(X)$ est une intersection de convexes, donc il est convexe. C'est le plus petit convexe contenant X.

2) Soit F l'ensemble des barycentres à coefficients positifs de points de X. Il est lui-même stable par barycentration à coefficients positifs, c'est donc un convexe. Comme il contient X, il fait partie de la famille dont $\mathrm{Conv}(X)$ est l'intersection, donc $\mathrm{Conv}(X) \subset F$.

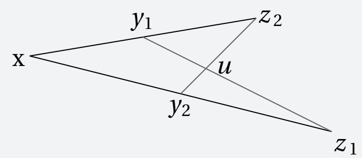
De plus, $\mathrm{Conv}(X)$ est convexe, donc il est stable par barycentration à coefficients positifs et contient en particulier tous les barycentres à coefficients positifs de points de X, c'est-à-dire $F \subset \mathrm{Conv}(X)$.

En définitive, $\mathrm{Conv}(X) = F$.

3) Un point $y \in \Gamma$ est barycentre à coefficients positifs d'une famille contenant x et un nombre fini de points $(c_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ de C. Si $y \neq x$, la somme des coefficients des c_i est non nulle et on peut remplacer ces points par leur barycentre partiel z, qui appartient encore à C. Ainsi, y est le barycentre de x et z, affectés de coefficients positifs : il appartient au segment $[x,z]$.



4) Supposons que les deux parties $C_1\cap\Gamma_2$ et $C_2\cap\Gamma_1$ soient non vides. Soit $y_1\in C_1\cap\Gamma_2$ et $y_2\in C_2\cap\Gamma_1$. D'après la question 3, il existe $z_1\in C_1$ et $z_2\in C_2$ tels que $y_1 \in [x,z_2]$ et $y_2 \in [x,z_1]$. Comme y_1 et z_1 appartiennent à C_1, qui est convexe, $[y_1,z_1] \subset C_1$. De même, $[y_2,z_2] \subset C_2$.



Le quadrilatère plan (y_1,z_2,z_1,y_2) étant convexe, ses diagonales $[y_1,z_1]$ et $[y_2,z_2]$ se coupent en un point u, qui doit appartenir à C_1 et à C_2. Ceci contredit l'hypothèse stipulant que C_1 et C_2 sont disjoints. Donc l'un au moins des ensembles $C_1\cap\Gamma_2$ ou $C_2\cap\Gamma_1$ est vide.

Concrètement, cela signifie que, C_1 et C_2 étant deux convexes disjoints, si pour un observateur x quelconque au moins un point de C_1 est caché par C_2, alors aucun point de C_2 n'est caché par C_1 et *vice-versa*.

Corrigés des sujets de concours

Sujet A

Quand on lâche la chaîne, elle reprend sa figure initiale sous la seule action de la pesanteur, qui fait nécessairement descendre le centre de gravité. Celui de la chaîne tendue est donc plus haut que celui de la chaînette, qui représente un équilibre stable.

Sujet B

Soit $(x,y)\in I^2$. En réappliquant la propriété en remplaçant y par $\dfrac{x+y}{2}$, on obtient :

$$f\left(\frac{x+\frac{x+y}{2}}{2}\right) \leqslant \frac{f(x)+\frac{f(x)+f(y)}{2}}{2}$$

C'est-à-dire : $f\left(\dfrac{3x+y}{4}\right) \leqslant \dfrac{3f(x)+f(y)}{4}$.

Plus généralement, quel que soit $n\in\mathbb{N}$ et $p\in[\![0,2^n]\!]$:

$$f\left(\frac{p}{2^n}x+\left(1-\frac{p}{2^n}\right)y\right)\leqslant\frac{p}{2^n}f(x)+\left(1-\frac{p}{2^n}\right)f(y)$$

L'ensemble $B=\{\mu\in[0,1],\ \exists n\in\mathbb{N},\ 2^n\mu\in\mathbb{N}\}$ est dense dans $[0,1]$, c'est-à-dire que, pour tout $\lambda\in[0,1]$, il existe une suite $(\mu_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de B qui converge vers λ. Pour tout $k\in\mathbb{N}$:

$$f\left(\mu_k x+(1-\mu_k)y\right)\leqslant\mu_k f(x)+(1-\mu_k)f(y)$$

En passant à la limite, à l'aide de la continuité de f, on obtient :

$$f\left(\lambda x+(1-\lambda)y\right)\leqslant\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$$

C'est-à-dire que f est convexe.

Sujet C

1) La fonction logarithme népérien est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et sa dérivée seconde, $x\mapsto-\frac{1}{x^2}$, est négative : elle est concave. On en déduit pour a et b strictement positifs et $\lambda\in]0,1[$:

$$\ln\big(\lambda a+(1-\lambda)b\big)\geqslant\lambda\ln a+(1-\lambda)\ln b$$

D'où, en composant par la fonction exponentielle, qui est croissante :

$$\lambda a+(1-\lambda)b\geqslant e^{\lambda\ln a}e^{(1-\lambda)\ln b}=a^\lambda b^{1-\lambda}$$

Cette inégalité reste vraie pour $a=0$ ou $b=0$, puisque le second membre s'annule.
Considérons de même la fonction $x\mapsto x^u$, avec $u>1$. Elle est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et sa dérivée seconde, $x\mapsto u(u-1)x^{u-2}$, est positive sur $\mathbb{R}_+^*$. Elle est donc convexe. On en déduit, pour a et b strictement positifs et $\lambda\in]0,1[$:

$$\big(\lambda a+(1-\lambda)b\big)^u\leqslant\lambda a^u+(1-\lambda)b^u$$

Cette inégalité reste vraie pour $a=0$ ou $b=0$, puisque $\lambda^u\leqslant\lambda$ et $(1-\lambda)^u\leqslant1-\lambda$.

2) Ici, a et b seront d'emblée supposés positifs au sens large. Considérons la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+$ par $g(x)=(x+b)^\lambda-(x^\lambda+b^\lambda)$. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $g'(x)=\lambda\big((x+b)^{\lambda-1}-x^{\lambda-1}\big)$. Or $\lambda-1<0$, donc la fonction $x\mapsto x^{\lambda-1}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, donc $(x+b)^{\lambda-1}\leqslant x^{\lambda-1}$ et $g'(x)\leqslant0$. La fonction g est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme elle est continue en 0, pour tout $x\geqslant0$, $g(x)\leqslant g(0)=0$. Donc $g(a)\leqslant0$, ce qui équivaut à :

$$(a+b)^\lambda\leqslant a^\lambda+b^\lambda$$

Sujet D

Partie A

1) Raisonnons par récurrence :

- Pour $n=1$: $\Phi(x)=\Phi(x+1)-\ln(x+1)$.
- Soit $n\in\mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $x\in I$, $\Phi(x)=\Phi(x+n)-\ln\big((x+1)\cdots(x+n)\big)$. Appliquons cette égalité à $x+1$:

$$\Phi(x+1)=\Phi(x+n+1)-\ln\big((x+2)\cdots(x+n+1)\big)$$

Alors :

$$\Phi(x)=\Phi(x+1)-\ln(x+1)=\Phi(x+n+1)-\ln\big((x+1)\cdots(x+n+1)\big)$$

2) La fonction Φ étant convexe, elle est dérivable à gauche et à droite en tout point $x \in I$ et :

$$\Phi'_g(x) \leqslant \Phi'_d(x) \leqslant \frac{\Phi(x+1)-\Phi(x)}{(x+1)-x} \leqslant \Phi'_g(x+1) \leqslant \phi'_d(x+1)$$

La première inégalité donne $\Phi'_g(x) \leqslant \Phi'_d(x) \leqslant \ln(x+1)$; la deuxième, appliquée à $x-1$ lorsque $x>0$, donne $\ln(x) \leqslant \Phi'_g(x) \leqslant \Phi'_d(x)$. D'où :

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad \ln(x) \leqslant \Phi'_g(x) \leqslant \Phi'_d(x) \leqslant \ln(x+1)$$

3) Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \big(\ln(x+1)-\ln(x)\big) = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln(1+\frac{1}{x}) = 0$, *a fortiori* $\lim\limits_{x\to+\infty} \big(\Phi'_d(x)-\Phi'_g(x)\big) = 0$.

4) D'après le résultat de la question 1, pour tout $x \in I$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\Phi'_g(x) = \Phi'_g(x+n) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x+k} \quad \text{et} \quad \Phi'_d(x) = \Phi'_d(x+n) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x+k}$$

D'où $\Phi'_d(x)-\Phi'_g(x) = \Phi'_d(x+n) - \Phi'_g(x+n)$.
En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient $\Phi'_d(x)-\Phi'_g(x) = 0$, donc Φ est dérivable en x.

Partie B

1) Effectuons un développement limité :

$$u_n(x) = x\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2})\right) - \left(\frac{x}{n} - \frac{x^2}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2})\right) = \frac{x^2-x}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2})$$

Comme $u_n(x)$ est dominé par $\frac{1}{n^2}$, la série $\sum u_n(x)$ converge.

2) Calculons $S_n(x)$:

$$S_n(x) = x\sum_{k=1}^{n} \ln\big(1+\frac{1}{k}\big) - \sum_{k=1}^{n} \ln(1+\frac{x}{k})$$

Le premier terme se télescope :

$$S_n(x) = x\ \ln(n+1) - \sum_{k=1}^{n} \ln(k+x) + \sum_{k=1}^{n} \ln k$$

Ce dernier terme est égal à $\ln(n!)$, d'où l'égalité cherchée. La fonction affine $x \mapsto x\ \ln(n+1)+\ln(n!)$ est convexe ainsi que chaque fonction $x \mapsto -\ln(x+k)$, donc S_n est convexe comme somme de fonctions convexes. L'inégalité de définition d'une fonction convexe se conservant par passage à la limite, la fonction S est également convexe.

3) La fonction S est convexe sur I et :

$$S(x+1)-S(x) = \lim_{n\to+\infty} \big(S_n(x+1)-S_n(x)\big)$$

Or, d'après le résultat de la question 2 :

$$S_n(x+1)-S_n(x) = \ln(n+1) - \sum_{k=1}^{n} \big(\ln(x+1+k) - \ln(x+k)\big)$$

Par télescopage :

$$S_n(x+1)-S_n(x) = \ln(n+1) - \ln(x+n+1) + \ln(x+1) = \ln\frac{n+1}{n+x+1} + \ln(x+1)$$

ce qui tend vers $\ln(x+1)$ quand n tend vers $+\infty$. Donc $S(x+1)-S(x) = \ln(x+1)$. La fonction S appartient à F.

VUIBERT PRÉPAS

MATHS
MP/MP*

VUIBERT PRÉPAS, des ouvrages pour faire la différence :

- Des cours complets pour acquérir les connaissances indispensables
- Des fiches de synthèse et de méthodes pour réviser l'essentiel et acquérir les bons réflexes
- De nombreux exercices intégralement corrigés pour s'entraîner : Vrai/faux et exercices d'application
- Des sujets de concours corrigés pour se mettre en situation d'épreuve

SOMMAIRE

1. Groupes – 2. Anneaux et corps – 3. Éléments propres d'un endomorphisme ou d'une matrice carrée – 4. Réduction des endomorphismes et des matrices carrées – 5. Convexité – 6. Espaces vectoriels normés – 7. Topologie des espaces vectoriels normés – 8. Espaces préhilbertiens réels – 9. Endomorphismes des espaces euclidiens – 10. Séries numériques et vectorielles – 11. Familles sommables de nombres réels – 12. Suites et séries de fonctions – 13. Séries entières – 14. Fonctions vectorielles Arcs paramétrés – 15. Intégration sur un intervalle quelconque – 16. Probabilités sur un univers au plus dénombrable – 17. Variables aléatoires discrètes – 18. Équations différentielles linéaires – 19. Calcul différentiel

Les auteurs :

Xavier Oudot *est professeur de chaire supérieure de mathématiques*

*Avec la participation, pour les chapitres de probabilité, d'**Hélène Cerf-Danon** et de **Véronique Lods**, professeures de chaire supérieure en classes préparatoires au lycée Louis-le-Grand à Paris.*

ISBN : 978-2-311-40024-3

9 782311 400243

www.Vuibert.fr