

B. Bourgeois • F. Delaplace • F. Fortain • É. Tournesac

MATHS ECE

1^{re} et 2^e années

Tout-en-un

- L'essentiel du cours
- Applications
- Fiches méthode
- Exercices d'entraînement
- Sujets de concours
- Tous les corrigés détaillés
- Simulations avec Scilab

CONFORME
AU NOUVEAU
PROGRAMME

Avant-propos

Pour aborder sereinement les concours à l'issue de ses deux années de classe préparatoire, l'étudiant doit maîtriser le calcul algébrique sous toutes ses formes : les deux premiers chapitres sont consacrés à la révision de cette notion, exploitée dans le reste de l'ouvrage.

À partir du chapitre 3, il ne s'agit plus de réviser mais bien d'entamer les notions fondamentales du programme, caractérisé par un enseignement en spirale et une ouverture aux notions annexes, tout en respectant la division semestrielle. On trouvera dans l'ouvrage :

- **L'essentiel du cours**, résumant, dans chaque chapitre, les connaissances indispensables et complété par de nombreux exemples et exercices d'application corrigés. Ils sont destinés à démontrer une propriété ou à présenter son utilisation. Le programme n'étant pas uniquement constitué de définitions ou de théorèmes directement applicables en exercices, certaines propriétés proches sont à démontrer par l'étudiant ou précisées dans les énoncés pour permettre la résolution de problèmes. Le cours a donc été conçu en prenant en compte ces propriétés « adhérentes au programme » ;
- Des **exercices corrigés variés** qui recouvrent de nombreuses situations. Pour un travail profitable, l'étudiant doit repérer les connaissances et les méthodes qui lui manquent ; de façon fréquente, les corrigés sont volontairement sommaires, conçus tels pour permettre à l'étudiant de fournir le travail nécessaire à sa progression par la rédaction des calculs et des raisonnements ;
- Des **fiches méthode**, regroupées à la fin de chaque semestre, sont destinées à aider l'étudiant à rédiger ses propres fiches. Ces fiches recouvrent principalement les thèmes d'algèbre linéaire, qui posent généralement des difficultés de synthèse ;
- Des **sujets incontournables aux concours** qui regroupent deux des grands thèmes principaux à connaître.
- Des **simulations sur Scilab**, présentes dans les chapitres où le logiciel peut être utilisé mais surtout dans un chapitre annexe à la fin de l'ouvrage. Elles permettent de recouvrir les situations les plus diverses. Ces simulations ont pour but de présenter des séquences d'instructions répondant aux problèmes simplement, sans chercher à écrire des programmes complexes qui mettent davantage en avant le côté technique, au détriment du côté pratique.

Nous tenons à remercier toutes les personnes qui ont largement contribué à la réalisation de cet ouvrage : Danièle Peret-Gentil pour ses idées d'exercices et de méthodes, notamment en probabilités, Claire Delaplace pour sa relecture et ses conseils sur la fluidité de la lecture, et tous les étudiants qui, par leur participation en cours et leurs questions, nous ont aidé dans notre rédaction.

Merci également à l'équipe des éditions Vuibert ; c'est grâce à son écoute, ses conseils et sa grande disponibilité que cet ouvrage a vu le jour.

Table des matières

Avant-propos	iii
Première année – Premier Semestre	1
1 Nombres – Topologie de \mathbb{R} et géométrie dans \mathbb{R}^2	3
1.1 Nombres réels	3
1.2 Topologie de \mathbb{R}	8
1.3 Géométrie de \mathbb{R}^2	12
Énoncés	16
Corrigés	19
2 Calcul algébrique et représentation graphique de fonctions usuelles	27
2.1 Expressions algébriques	27
2.2 Équations et inéquations	30
2.3 Courbes des fonctions	40
Énoncés	49
Corrigés	51
3 Éléments de logique	59
3.1 Propositions et connecteurs logiques	59
3.2 Démonstrations	63
Énoncés	69
Corrigés	72
4 Ensembles et cardinaux	81
4.1 Référentiels et parties d'un ensemble	81
4.2 Opérations dans l'ensemble des parties d'un ensemble	83
4.3 Applications	86
4.4 Cardinaux	90
Énoncés	93
Corrigés	97
5 Calcul matriciel	107
5.1 Définitions et généralités	107
5.2 Matrices particulières	112
5.3 Opérations sur les matrices	115
Énoncés	126
Corrigés	130
6 Systèmes d'équations linéaires	141
6.1 Systèmes d'équations linéaires et matrices	141
6.2 Systèmes équivalents	143
6.3 Résolution d'un système d'équations linéaires	146
6.4 Système homogène	150
Énoncés	152
Corrigés	154
7 Suites de référence et convergence	163
7.1 Suites définies récursivement	163
7.2 Définitions	171
7.3 Suites convergentes	172
7.4 Variations et natures des suites de référence	174
7.5 Théorèmes	175
Énoncés	178
Corrigés	180

8	Polynômes à une indéterminée	187
8.1	Ensemble des polynômes	187
8.2	Espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$	190
8.3	Algèbre des polynômes	192
8.4	Arithmétique des polynômes	194
8.5	Factorisation dans $\mathbb{R}[X]$	198
	Énoncés	199
	Corrigés	202
9	Limites et continuité – Étude locale	213
9.1	Continuité et limite	213
9.2	Extension de la notion de limite	215
9.3	Asymptotes à la courbe d’une fonction	217
9.4	Opérations sur les limites	219
9.5	Théorèmes	220
9.6	Calcul des limites	221
	Énoncés	224
	Corrigés	226
10	Fonctions numériques – Étude globale	237
10.1	Généralités	237
10.2	Fonction continue sur un intervalle	239
10.3	Opérations et théorèmes	241
10.4	Bijections, fonctions réciproques et équations	245
	Énoncés	253
	Corrigés	255
11	Fonctions usuelles	267
11.1	Fonctions polynomiales	267
11.2	Fonctions rationnelles	269
11.3	Fonctions logarithmes	273
11.4	Fonctions exponentielles	279
11.5	Fonctions puissances	284
11.6	Fonction partie entière, fonction partie décimale	286
	Énoncés	289
	Corrigés	290
12	Probabilités finies	299
12.1	Événements	299
12.2	Combinaisons	301
12.3	Loi de probabilité et probabilités	303
12.4	Conditionnement et indépendance	307
	Énoncés	313
	Corrigés	316
	Fiches méthode – Semestre 1	325
	Première année – Deuxième Semestre	347
13	Dérivabilité, convexité et fonctions réciproques	349
13.1	Dérivabilité en un point	349
13.2	Fonctions dérivables et dérivées	353
13.3	Applications du calcul différentiel	359

13.4	Dérivées successives	364
13.5	Fonctions convexes	367
	Énoncés	370
	Corrigés	372
14	Intégration	379
14.1	Primitives d'une fonction continue – Fonctions d'aire et intégrale	379
14.2	Fonctions continues par morceaux	382
14.3	Propriétés des intégrales	385
14.4	Calcul des intégrales	388
14.5	Généralisation de la notion d'intégralité	393
	Énoncés	400
	Corrigés	404
15	Séries numériques	413
15.1	Généralités sur les séries numériques	413
15.2	Séries de référence	415
15.3	Série absolument convergente	419
	Énoncés	421
	Corrigés	423
16	Espace vectoriel $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$	433
16.1	Espace vectoriel $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$	433
16.2	Sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$	437
16.3	Applications linéaires	439
	Énoncés	441
	Corrigés	445
17	Espaces probabilisés	457
17.1	Tribu – Système complet d'événements	457
17.2	Probabilité – Espace probabilisé	459
17.3	Conditionnement	461
17.4	Indépendance	463
	Énoncés	466
	Corrigés	469
18	Variables aléatoires discrètes	479
18.1	Généralités sur les variables aléatoires réelles	479
18.2	Variable discrète	480
18.3	Moments d'une variable aléatoire	482
18.4	Lois discrètes usuelles	484
	Énoncés	492
	Corrigés	494
19	Variables à densité (1)	505
19.1	Généralités	505
19.2	Espérance	510
19.3	Lois usuelles	511
	Énoncés	518
	Corrigés	522

Fiches méthode – Semestre 2	537
Deuxième année – Troisième Semestre	561
20 Espaces vectoriels	563
20.1 Espace vectoriel	563
20.2 Sous-espaces vectoriels	564
20.3 Familles génératrices et bases	565
20.4 Matrice d’une famille de vecteurs de \mathbb{R}^n et de $\mathbb{R}_n[X]$	567
20.5 Familles libres et familles liées	568
20.6 Bases et dimension	571
20.7 Changement de bases et matrices de passage	573
Énoncés	574
Corrigés	577
21 Applications linéaires	589
21.1 Applications linéaires	589
21.2 Espaces vectoriels isomorphes	589
21.3 Image et noyau d’une application linéaire	590
21.4 Espace vectoriel de dimension finie	593
21.5 Rang d’une application linéaire et théorème du rang	596
21.6 Isomorphisme entre $\mathcal{L}(E, F)$ et $\mathfrak{M}_{n,m}(\mathbb{R})$	598
Énoncés	599
Corrigés	604
22 Réduction des endomorphismes et des matrices carrées	623
22.1 Réduction des endomorphismes	623
22.2 Réduction des matrices carrées	627
Énoncés	636
Corrigés	640
23 Suites et séries – Compléments	657
23.1 Comportement asymptotique des suites	657
23.2 Suites définies par récurrence – Compléments	661
23.3 Séries – Compléments	669
Énoncés	673
Corrigés	676
24 Comparaison des fonctions et développements limités	687
24.1 Négligeabilité	687
24.2 Équivalents	689
24.3 Développements limités	693
Énoncés	700
Corrigés	702
25 Intégrales impropres	713
25.1 Intégrales impropres des fonctions positives	713
25.2 Applications	717
Énoncés	724
Corrigés	728

26 Couples aléatoires discrets – Suites de variables aléatoires	741
26.1 Couples aléatoires discrets	741
26.2 Suites de variables aléatoires – Vecteurs aléatoires	749
Énoncés	751
Corrigés	754
Fiches méthode – Semestre 3	765
Deuxième année – Quatrième Semestre	809
27 Fonctions de deux variables (1)	811
27.1 Topologie de \mathbb{R}^2	811
27.2 Fonctions de deux variables	813
27.3 Continuité en un point	818
27.4 Continuité globale	821
27.5 Dérivées partielles d'ordre 1	822
Énoncés	827
Corrigés	830
28 Fonctions de deux variables (2)	841
28.1 Dérivées partielles d'ordre 2	841
28.2 Développement limité d'ordre 2 d'une fonction de classe C^2	844
28.3 Extrema sur un ouvert	847
28.4 Extrema sur un fermé borné	849
Énoncés	853
Corrigés	855
29 Variables à densité (2)	867
29.1 Fonctions de variables à densité	867
29.2 Opérations sur les variables indépendantes	870
29.3 Moments d'ordre 1 et 2	871
29.4 Lois usuelles	872
29.5 Suites de variables aléatoires – Vecteurs aléatoires	877
Énoncés	879
Corrigés	882
30 Convergence	891
30.1 Convergence en probabilité	891
30.2 Convergence en loi	892
Énoncés	900
Corrigés	904
31 Estimateurs et estimations	915
31.1 Échantillons d'une loi de probabilité	915
31.2 Estimateurs	918
31.3 Suites d'estimateurs	925
31.4 Estimation par intervalles de confiance	926
Énoncés	932
Corrigés	939

Fiches méthode – Semestre 4	951
Sujets incontournables aux concours	959
A Fonctions génératrices, suites et probabilités	961
A.1 Fonctions génératrices et suites	961
A.2 Fonctions génératrices et probabilités	968
B Processus de Poisson	985
Annexe	1011
Scilab	1013
Environnement	1013
Éditeur – Programmation	1021
Représentations graphiques	1022
Programmes	1027

Systèmes d'équations linéaires

L'objectif de ce chapitre est de donner une méthode de résolution des systèmes linéaires vérifiant les deux conditions suivantes :

- ▶ elle doit être universelle en ce sens qu'elle doit s'appliquer à tous les systèmes ;
- ▶ elle doit donner exactement l'ensemble des solutions et non un ensemble de solutions possibles.

La méthode qui sera décrite ici est la méthode de Gauss qui répond à ces deux exigences.

6.1 Systèmes d'équations linéaires et matrices

6.1.1 Système d'équations linéaires

On appelle *équation linéaire*, une équation de la forme :

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$$

où a_1, a_2, \dots, a_n, b sont des réels donnés et x_1, x_2, \dots, x_n des inconnues.

Un *système d'équations linéaires* (S) est la donnée simultanée de plusieurs équations linéaires.

Exemple

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = -1 \\ x - 3y = 2 \\ -x - 2y + z = 0 \end{cases}$$

est un système de trois équations linéaires. *Résoudre* le système, c'est déterminer les valeurs de x , y et z qui vérifient les trois égalités.

Le système est dit *homogène* si le second membre est nul, c'est-à-dire si le système est constitué d'équations de la forme :

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = 0$$

6.1.2 Matrice d'un système d'équations linéaires

Tout système d'équations linéaires (S) est *équivalent* à une équation matricielle de la forme $A.X = B$, qu'on écrit aussi $AX = B$, où :

- ▶ A est la matrice des coefficients des inconnues ;

► $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ est la matrice des inconnues, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ est la matrice du second membre.

La matrice A est appelée *matrice du système*.

$A X = B$ est parfois appelée *écriture matricielle du système* (S) (ou écriture matricielle associée au système (S)) et on dit aussi que le système d'équations (S) est *équivalent* à l'équation matricielle $A X = B$.

Exemple

Le système suivant :

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = -1 \\ x - 3y = 2 \\ -x - 2y + z = 0 \end{cases}$$

est équivalent à l'équation matricielle $A X = B$ avec :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -3 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

6.1.3 Ensemble des solutions d'un système

Soit un système d'équations linéaires (S) à coefficients dans \mathbb{R} dont les inconnues sont notées x_1, x_2, \dots, x_n . On appelle *ensemble de solutions* \mathcal{S} de (S), le sous-ensemble de \mathbb{R}^n constitué de toutes les n -listes solutions du système.

On notera que \mathcal{S} n'est pas vide, car la n -liste $(0, 0, \dots, 0)$ est une solution de S. Par la suite, on confondra le système d'équations et son écriture matricielle, les solutions du système et les matrices colonnes, solutions de l'équation matricielle du système.

Propriété 1

L'ensemble des solutions \mathcal{S} d'un système homogène est stable par addition et multiplication par un réel ; c'est-à-dire :

$$\forall (X_1, X_2) \in \mathcal{S}^2, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \alpha X_1 + X_2 \in \mathcal{S}$$

On dit que \mathcal{S} est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n .

Propriété 2

Soit $A X = B$ l'écriture matricielle d'un système d'équations linéaires, X_1 une solution particulière du système, c'est-à-dire un vecteur colonne vérifiant $A X_1 = B$, et \mathcal{S}_0 le sous-espace vectoriel des solutions du système d'équations homogène associé, c'est-à-dire l'ensemble des solutions de l'équation $A X = 0$.

L'ensemble des solutions d'un système d'équations linéaires est l'ensemble \mathcal{S} des n -listes égales à la somme de X_1 et d'un vecteur de \mathcal{S}_0 :

$$\mathcal{S} = \{X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}) / \exists X_0 \in \mathcal{S}_0, X = X_0 + X_1\}$$

6.1.4 Systèmes d'équations linéaires et Scilab

D'après les propriétés 1 et 2 ci-dessus, un vecteur est solution d'un système d'équations linéaires dont l'écriture matricielle est $AX = B$ si, et seulement si, il est de la forme $X_1 + X_0$, où X_0 est une solution du système homogène associé et X_1 une solution particulière du système.

L'ensemble S_0 des vecteurs X_0 est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n , noté $\text{Ker}A$ dans Scilab (on en verra la raison au troisième semestre, chapitre 21); l'ensemble des solutions de l'équation est donné par l'instruction $[x, \text{ker}A] = \text{linsolve}(A, b)$:

```
--> A = [2 -1 3; 1 -3 0; -1 -2 1]    (←)
```

```
--> b = [-1; 2; 0]    (←)
```

```
--> [x, kerA] = linsolve (A, b)    (←)
```

On comprendra que l'ensemble des solutions du système homogène associé est réduit à l'unique solution $(0, 0, 0)$ et que l'ensemble des solutions du système $AX = B$ est réduit à l'unique solution donnée par Scilab en valeur approchée :

$$(x, y, z) = (-0.35, 0.55, 0.75)$$

6.2 Systèmes équivalents

6.2.1 Équivalence par réduction

On dit qu'un système d'équations (S') est *équivalent par réduction* à un système d'équations (S) s'il se déduit de (S) en supprimant éventuellement les équations identiques (s'il y en a).

Exemple

Le système (S) :

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ -x - y + 2z = 0 \\ x - 2y + 3z = 1 \end{cases}$$

est équivalent par réduction à (S') :

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ -x - y + 2z = 0 \end{cases}$$

On conviendra de dire que tout système d'équations n'ayant pas d'équations identiques est équivalent à lui-même par réduction.

Ainsi, (S) est équivalent à (S') par réduction.

On notera que deux systèmes d'équations linéaires équivalents par réduction ont le même ensemble de solutions.

6.2.2 Équivalence linéaire et équivalence de deux systèmes

Soit (S) un système d'équations linéaires et $AX = B$ son écriture matricielle. On dit qu'un système d'équations linéaires (S') est *linéairement équivalent* à (S), s'il existe une matrice inversible C telle que l'écriture matricielle de (S') soit $CAX = CB$.

On dit que deux systèmes d'équations linéaires sont *équivalents* si l'un est équivalent par réduction à un système linéairement équivalent de l'autre.

Exemple

Considérons le système (S) défini par :

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = -1 \\ x - 3y = 2 \\ -x - 2y + z = 0 \end{cases}$$

dont l'écriture matricielle est $AX = B$ avec :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -3 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et la matrice :

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Elle est inversible, car elle est triangulaire supérieure sans 0 sur la diagonale ; rappelons que son inverse nous est donné dans la console Scilab par la syntaxe C^{-1} ou $\text{inv}(C)$:

```
--> C = [1 1 -1; 0 1 -1; 0 0 1]    (←)
```

```
--> C^-1    (←)
```

Soit le système (S') dont l'écriture matricielle est $CAX = CB$:

$$CA = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad CB = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

alors le système (S) est linéairement équivalent à (S') :

$$\begin{cases} 4x - 2y + 2z = 1 \\ 2x - y - z = 2 \\ -x - 2y + z = 0 \end{cases}$$

On notera que deux systèmes équivalents ont même ensemble de solutions.

6.2.3 Transformations élémentaires sur les lignes d'une matrice

On dit qu'une matrice A' est une transformée (sur les lignes) de A si A' est égale au produit à gauche de la matrice A par une matrice inversible T . La matrice T est la matrice de la transformation de l'identité. Elle peut être le produit de plusieurs matrices de transformations successives ; la matrice de la première transformation étant celle de droite dans le produit.

Exemple

Pour la matrice A ci-dessous, on veut permuter la première ligne et la deuxième ($L_1 \leftrightarrow L_2$), puis remplacer la troisième ligne par la troisième ligne moins deux fois la seconde ($L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$) et la quatrième par la quatrième plus trois fois la seconde.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice obtenue par cette transformation est donnée par Scilab :

```
--> A = [2 -1 1; 1 0 3; 0 -1 2; 2 2 1]    (←)
--> T = [1 0 0 0; 0 1 0 0; 0 -2 1 0; 0 3 0 1] * [0 1 0 0; 1 0 0 0; ...
0 0 1 0; 0 0 0 1]    (←)
--> B = T * A    (←)
B =
    1.    0.    3.
    2.   -1.    1.
   -4.    1.    0.
    8.   -1.    4.
```

Les applications qui :

- ▶ échangent deux lignes d'une matrice $L_i \leftrightarrow L_j$;
- ▶ remplacent une ligne L_i par αL_i , où $\alpha \neq 0$;
- ▶ remplacent une ligne L_i par une somme de cette ligne avec une autre : $L_i \leftarrow L_i + L_j$;
- ▶ remplacent une ligne L_i par $\alpha L_i + \beta L_j$, où $\alpha \neq 0$,

sont des transformations dites élémentaires sur les lignes des matrices.

6.2.4 Réduction d'une matrice par la méthode de Gauss

Soit n et m des entiers supérieurs ou égaux à 2 et $A \in \mathfrak{M}_{n,m}(\mathbb{R})$; il existe une matrice $B = (b_{ij}) \in \mathfrak{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ telle que :

- ▶ si $B \neq 0$, alors $b_{1,1} \neq 0$ et $b_{2,1} = 0$ (on confond la matrice B avec sa sous-matrice obtenue en supprimant toutes les premières colonnes, si elles sont nulles);
- ▶ si, pour $(i, j) \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket^2$ et pour tout $k \in \llbracket 1, j \rrbracket$, $b_{i,k} = 0$ et $b_{i,j+1} \neq 0$, alors, pour tout $k \in \llbracket 1, j+1 \rrbracket$, $b_{i+1,k} = 0$.

On dit que B est une réduite de Gauss de A .

Méthode pour obtenir une réduite de Gauss

- ▶ Si le coefficient $a_{1,1}$ de la matrice à réduire n'est pas nul, on l'utilise comme pivot pour réduire toutes les autres lignes de la matrice. S'il est nul, on permute d'abord la première avec l'une des lignes ayant un coefficient $a_{i,1} \neq 0$, puis on réduit les autres lignes de la matrice obtenue après cette permutation (en ne considérant la réduction que sur la sous-matrice obtenue en supprimant toutes les premières colonnes nulles, s'il y en a).
- ▶ Dans la nouvelle matrice obtenue, tous les coefficients $a_{1,i}$ sont nuls pour $i \geq 2$. On réduit de la même façon que précédemment la sous-matrice issue du résultat précédent en supprimant la première ligne et la première colonne et ainsi de suite jusqu'à l'obtention d'une réduite de Gauss de la matrice initiale.

Propriétés

Ce qui précède permet d'affirmer que :

- ▶ toute matrice carrée peut se réduire en une matrice triangulaire supérieure;
- ▶ toute réduite de Gauss est une matrice n'ayant que des 0 sous sa diagonale.

6.3 Résolution d'un système d'équations linéaires

Un système d'équations linéaires se présente matriciellement sous la forme $AX = B$, où A est la matrice du système, X celle des inconnues et B la matrice colonne du second membre.

Si plusieurs systèmes d'équations ne diffèrent entre eux que par leur second membre, alors on pourra résoudre un seul système en considérant pour second membre la concaténation des matrices colonnes du second membre (voir l'exercice 6.1).

Pour résoudre un système d'équations linéaires, on peut utiliser la méthode de Gauss sur la matrice bloc $[A \ B]$ ou (AB) .

Dans la pratique, on n'écrit pas les matrices de transformations ; on écrit directement les matrices transformées. C'est ce que nous ferons dorénavant.

Exercice 6.1. Résoudre les systèmes suivants.

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = -1 \\ x - 3y = 2 \\ -x - 2y + z = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} 2x - y + 3z = 3 \\ x - 3y = -2 \\ -x - 2y + z = 1 \end{cases}$$

Solution

Le système s'écrit matriciellement $AX = B$ avec :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -3 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On considère la matrice bloc $M = [A \ B]$, c'est-à-dire :

$$M = \left(\left(\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -3 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \right) \left(\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \right) \quad \text{que l'on écrit} \quad M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & -3 & 0 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On va résoudre simultanément les deux systèmes d'équations en utilisant la *méthode de Gauss* sur M .

► On utilise $a_{1,1} = 2$ comme pivot pour réduire les lignes 2 et 3 ; on obtient :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & -5 & -3 & 5 & -7 \\ 0 & -5 & 5 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

► On utilise $a_{2,2} = -5$ comme pivot pour réduire la ligne 3 ; on obtient la réduite de Gauss :

$$M_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & -5 & -3 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & 8 & -6 & 12 \end{pmatrix}$$

La réduite de Gauss obtenue sous la forme de matrice bloc s'écrit :

$$M' = \left(\left(\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \right) \left(\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 5 & -7 \\ -6 & 12 \end{pmatrix} \right) \right)$$

Ainsi, les systèmes à résoudre sont respectivement équivalents aux deux systèmes suivants :

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = -1 \\ -5y - 3z = 5 \\ 8z = -6 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} 2x - y + 3z = 3 \\ -5y - 3z = -7 \\ 8z = 12 \end{cases}$$

- Pour le premier système, on a $z = -\frac{3}{4}$ et (2^e équation) $y = -1 - \frac{3}{5}z = -1 + \frac{9}{20} = -\frac{11}{20}$; dans la première équation :

$$x = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}y - \frac{3}{2}z = -\frac{1}{2} - \frac{11}{40} + \frac{9}{8} = \frac{7}{20}$$

L'ensemble des solutions de ce premier système est :

$$S_1 = \left\{ \left(\frac{7}{20}, -\frac{11}{20}, -\frac{3}{4} \right) \right\}$$

- Pour le second système, on a $z = \frac{3}{2}$ et (2^e équation) $y = \frac{7}{5} - \frac{3}{5}z = \frac{7}{5} - \frac{9}{10} = \frac{1}{2}$; dans la première équation :

$$x = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}y - \frac{3}{2}z = \frac{3}{2} + \frac{1}{4} - \frac{9}{4} = -\frac{1}{2}$$

L'ensemble des solutions de ce second système est :

$$S_2 = \left\{ \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right) \right\}$$

6.3.1 Système de Cramer

On dit qu'un système d'équations linéaires est un système de Cramer si sa matrice est une matrice carrée inversible.

Exercice 6.2. Pour quelles valeurs du paramètre a , le système suivant est-il de Cramer ?

$$\begin{cases} (2-a)x + y - z = 1 \\ x - (2-a)y - 3z = -2 \\ -x + 3y + (2-a)z = 2 \end{cases}$$

Solution

La matrice du système est :

$$A = \begin{pmatrix} 2-a & 1 & -1 \\ 1 & -2+a & -3 \\ -1 & 3 & 2-a \end{pmatrix}$$

On va réduire cette matrice par la méthode de Gauss.

- On permute la première et la troisième ligne, car le premier élément en haut à gauche n'est pas nécessairement non nul.

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2-a \\ 1 & -2+a & -3 \\ 2-a & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

- On utilise $a_{1,1} = -1$ comme pivot pour réduire les lignes 2 et 3 ($L_2 \leftarrow L_2 + L_1$) et ($L_3 \leftarrow L_3 + (2-a)L_1$):

$$A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2-a \\ 0 & 1+a & -1-a \\ 0 & 7-3a & 3-4a+a^2 \end{pmatrix}$$

À ce niveau, on doit distinguer deux cas :

- Si $a \neq -1$, on utilise $a_{2,2} = 1+a$ comme pivot afin de réduire la troisième ligne ($L_3 \leftarrow (1+a)L_3 + (3a-7)L_2$):

$$A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2-a \\ 0 & 1+a & -1-a \\ 0 & 0 & 10+3a-6a^2+a^3 \end{pmatrix}$$

On voit que, dans l'expression $a^3 - 6a^2 + 3a + 10$, on peut mettre $a+1$ en facteur et on obtient :

$$a^3 - 6a^2 + 3a + 10 = (a-5)(-2+a)(1+a)$$

Il en résulte que, lorsque $a \neq -1$, le système est de Cramer si $a \neq 5$ et $a \neq 2$.

- Si $a = -1$, la réduite obtenue à l'issue de la seconde étape est :

$$A'_2 = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 8 \end{pmatrix}$$

Il est clair que la matrice n'est pas inversible et donc que le système donné n'est pas de Cramer pour cette valeur de a . On obtient une réduite de Gauss de cette matrice en divisant la dernière ligne par 2 et en permutant les deux dernières lignes :

$$A'_3 = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ce qui confirme la non-inversibilité de la matrice.

Conclusion : Le système est un système de Cramer si, et seulement si : $a \neq -1$, $a \neq 2$ et $a \neq 5$.

6.3.2 Propriété

Un système de n équations linéaires à n inconnues admet une unique solution si, et seulement si, ce système est de Cramer.

Matriciellement : $A X = B$ et A inversible $\Rightarrow X = A^{-1} B$.

En particulier, si $B = 0$ alors $X = 0$.

Exercice 6.3. Résoudre le système suivant pour $a = 1 - \sqrt{2}$ et pour $a = 5$.

$$\begin{cases} (2-a)x + y - z = 0 \\ x - (2-a)y - 3z = 0 \\ -x + 3y + (2-a)z = 0 \end{cases}$$

Solution

Le système est homogène donc son ensemble de solutions est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 .

- ▶ L'exercice précédent nous dit que le système est de Cramer pour $a = 1 - \sqrt{2}$; donc, dans ce cas, le système admet une unique solution : $(0, 0, 0)$.
- ▶ Pour $a = 5$, le système n'est pas de Cramer et la réduite de Gauss obtenue est :

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 \\ 0 & 6 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- ▶ On divise la deuxième ligne par 6 et on obtient la matrice :

$$B' = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- ▶ On utilise $a_{2,2} = 1$ comme pivot pour réduire la ligne 1 ($L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2$) :

$$B_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- ▶ On peut écrire le système équivalent au système initial :

$$\begin{cases} -x = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

L'ensemble des solutions du système est :

$$S = \{(0, z, z) / z \in \mathbb{R}\}$$

6.4 Système homogène

Un système d'équations linéaires $AX = B$ est dit *homogène* si le second membre B est la matrice colonne nulle.

On a vu ci-dessus que, si A est inversible, l'équation matricielle $AX = 0$ admettait une seule solution $X = 0$.

Remarque : Si $AX = B$ est un système homogène réduit, alors $A \in \mathfrak{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ avec $m \geq n$, car, dans une réduction par la méthode de Gauss d'une matrice, il n'y a que des 0 sous la diagonale et un système homogène est réduit lorsqu'en particulier, on a supprimé toutes les lignes nulles. On va maintenant étudier le cas où le nombre d'inconnues est supérieur au nombre d'équations.

Propriété

Si une réduction de Gauss d'un système d'équations linéaires homogène s'écrit matriciellement $AX = 0$, avec $A \in \mathfrak{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ et $m > n$, alors l'ensemble des solutions de ce système d'équations est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^m non réduit au vecteur nul et donc ce système admet une infinité de solutions.

Exemple

On considère le système réduit d'inconnues réelles :

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_5 - x_6 = 0 \\ 2x_2 - x_3 + x_4 + 2x_6 = 0 \\ \quad \quad \quad x_4 - x_5 + 2x_6 = 0 \\ \quad \quad \quad \quad \quad x_5 - x_6 = 0 \end{cases}$$

La matrice du système s'écrit :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Soit a et b deux réels arbitraires tels que $x_3 = a$ et $x_6 = b$. On écrit le système sous la forme :

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_5 - x_6 = 0 \\ 2x_2 - x_3 + x_4 + 2x_6 = 0 \\ \quad \quad \quad x_3 = a \\ \quad \quad \quad x_4 - x_5 + 2x_6 = 0 \\ \quad \quad \quad \quad \quad x_5 - x_6 = 0 \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad x_6 = b \end{cases}$$

Le système s'écrit $A_1 X = B$ avec :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \\ 0 \\ 0 \\ b \end{pmatrix}$$

La matrice A_1 est inversible, car c'est une matrice triangulaire supérieure sans 0 sur la diagonale. Donc le système $A_1 X = B$ admet une seule racine :

$$X = A_1^{-1} B = \begin{pmatrix} a - b \\ \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b \\ a \\ -b \\ b \\ b \end{pmatrix}$$

Les valeurs de a et b pouvant être quelconques, on en déduit que l'ensemble des solutions de l'équation matricielle $A X = 0$ est :

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a - b \\ \frac{a-b}{2} \\ a \\ -b \\ b \\ b \end{pmatrix} / a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

Bien sûr, le vecteur nul est une solution de l'équation matricielle $A X = 0$.

Énoncés

Exercice 6.1. Démontrer la propriété 1 :

L'ensemble des solutions \mathcal{S} d'un système homogène est stable par addition et multiplication par un réel ; c'est-à-dire :

$$\forall (X_1, X_2) \in \mathcal{S}^2, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \alpha X_1 + X_2 \in \mathcal{S}$$

Exercice 6.2. Démontrer la propriété 2 :

Soit $A X = B$ l'écriture matricielle d'un système d'équations linéaires, X_1 une solution particulière du système, c'est-à-dire un vecteur colonne vérifiant $A X_1 = B$, et \mathcal{S}_0 le sous-espace vectoriel des solutions du système d'équations homogène associé, c'est-à-dire l'ensemble des solutions de l'équation $A X = 0$.

L'ensemble des solutions d'un système d'équations linéaires est l'ensemble \mathcal{S} des n -listes égales à la somme de X_1 et d'un vecteur de \mathcal{S}_0 :

$$\mathcal{S} = \{X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}) / \exists X_0 \in \mathcal{S}_0, X = X_0 + X_1\}$$

Exercice 6.3. On considère la matrice suivante.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Déterminer une réduite de Gauss de A .

Exercice 6.4. Donner une réduite de Gauss de la matrice suivante.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 6.5. Donner une réduite de Gauss de la matrice suivante.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 & 1 & 3 & 0 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -1 & -2 & 0 & -1 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 3 & -2 & -3 & 1 & -2 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & -3 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & -3 & 2 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & -4 & 3 & 4 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 6.6.

1. Déterminer une matrice inversible P telle que :

$$P \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. On considère le système d'équations dans \mathbb{R} :

$$\begin{cases} x - y + 2z = a \\ y + z = b \\ 3x - 2y + z = c \\ -x + y - 2z = d \end{cases}$$

où a, b, c, d sont 4 réels fixés. À quelle(s) condition(s) sur a, b, c, d ce système a-t-il des solutions ?

Exercice 6.7.

1. Résoudre le système d'équations suivant.

$$\begin{cases} 2x + 3y + z + t = 2 \\ 4x + 4y + z + 4t = 3 \\ 6x + 7y + 2z + 5t = 5 \end{cases}$$

2. En déduire les solutions positives du système suivant.

$$\begin{cases} x^2 y^3 z t = e^2 \\ (x y t)^4 z = e^3 \\ x^6 y^7 z^2 t^5 = e^5 \end{cases}$$

Corrigés

Corrigé exercice 6.1. Soit $AX = 0$ l'écriture matricielle associée au système. On confondra ainsi les solutions du système et les solutions de l'équation matricielle associée, c'est-à-dire les vecteurs colonnes.

- L'ensemble S est un sous-ensemble de \mathbb{R}^n non vide car il contient toujours le vecteur nul $X = 0$.
- Soit X_1 et X_2 deux solutions matricielles du système. Alors $AX_1 = AX_2 = 0$ et, par suite, quel que soit le scalaire α , $A(\alpha X_1 + X_2) = \alpha AX_1 + AX_2 = 0$ donc $\alpha X_1 + X_2$ est un élément de S . Il en résulte que S est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n .

Corrigé exercice 6.2. Soit X_1 une solution du système $AX = B$, c'est-à-dire un vecteur colonne vérifiant $AX_1 = B$. Alors, pour toute solution X_2 de ce système, on a aussi $AX_2 = B$; il s'ensuit, par différence, que $AX_2 - AX_1 = 0$, soit $A(X_2 - X_1) = 0$; il en résulte que $X_0 = X_2 - X_1$ est un élément de S_0 et donc que $X_2 = X_0 + X_1$. Donc toute solution de $AX = B$ est la somme de X_1 et d'une solution du système homogène associé.

Réciproquement, soit $X_2 = X_0 + X_1$, où $X_0 \in S_0$ et X_1 est solution de $AX = B$. Alors, $AX_2 = A(X_0 + X_1) = AX_0 + AX_1 = 0 + B = B$, donc X_2 est bien une solution de $AX = B$.

Corrigé exercice 6.3.

- En prenant $a_{1,1} = 2$ comme pivot, on réduit la deuxième et la quatrième lignes :
($L_2 \leftarrow 2L_2 - L_1$) et ($L_4 \leftarrow L_4 - L_1$).

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On obtient :

$$C_1 A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

- Sur cette nouvelle matrice, on considère l'élément qu'on notera $a_{2,2} = 1$ comme pivot pour réduire la troisième et la quatrième lignes : ($L_3 \leftarrow L_3 + L_2$) et ($L_4 \leftarrow L_4 - 3L_2$).

$$C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On vérifie :

$$C_2(C_1 A) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & -15 \end{pmatrix}$$

- Enfin, sur cette dernière matrice, en utilisant $a_{3,3} = 7$ comme pivot, on réduit la quatrième ligne, ($L_4 \leftarrow 7L_4 + 15L_3$).

$$C_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 15 & 7 \end{pmatrix}$$

On obtient, comme réduite de Gauss, la matrice A_1 donnée par :

$$A_1 = C_3(C_2 C_1 A) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Corrigé exercice 6.4. Les trois premières colonnes étant nulles, on ne fait la réduction que sur la matrice carrée :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 3 \\ -2 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

- Il est impossible d'utiliser l'élément $b_{1,1}$ comme pivot puisque celui-ci est nul. Permutons d'abord la première et la quatrième lignes de façon à amener un coefficient non nul en $b_{1,1}$.

$$C_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On a alors la matrice :

$$C_1 A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

- On utilise $b_{1,1} = 1$ comme pivot pour réduire les lignes 2 et 3; nous laissons le soin au lecteur de lire dans la matrice C_2 les transformations qui ont été faites.

$$C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On obtient la matrice :

$$C_2(C_1 A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

- Il est impossible d'utiliser l'élément $b_{2,2}$ comme pivot, puisque celui-ci est nul. Permutons la seconde et la quatrième lignes :

$$C_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On obtient la matrice :

$$C_3(C_2 C_1 A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

- On utilise $b_{2,2} = -1$ comme pivot pour réduire la troisième ligne; là encore, le lecteur lira la transformation sur la matrice C_4 ci-dessous.

$$C_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On obtient la matrice :

$$C_4(C_3 C_2 C_1 A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

- On utilise $b_{3,3} = 3$ pour réduire la quatrième ligne.

$$C_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Fiches méthode

Semestre 1

Étude de la nature d'une application

Attention : Les méthodes développées ici s'appliquent à toutes les applications mais les applications linéaires bénéficient de méthodes supplémentaires qui seront étudiées dans une autre fiche.

1. **Pour montrer qu'une application f d'un ensemble E dans un ensemble F est injective**, on montre que :

$$\forall x, x' \in E, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'.$$

Par exemple, l'application $f : x \mapsto x^2 + x - 5$ est-elle une injection de \mathbb{N} dans \mathbb{N} ?

On considère deux entiers naturels x et x' tels que $f(x) = f(x')$:

$$f(x) = f(x') \Leftrightarrow x^2 + x - 5 = x'^2 + x' - 5$$

$$f(x) = f(x') \Leftrightarrow (x - x')(x + x' + 1) = 0$$

Comme x et x' sont deux entiers naturels, il est clair que $x + x' + 1$ est strictement positif. Par suite :

$$f(x) = f(x') \Leftrightarrow x = x'$$

Il en résulte que l'application f est une injection de \mathbb{N} dans \mathbb{N} .

Pour montrer qu'une application n'est pas injective, on montre qu'il existe deux éléments distincts de l'ensemble de départ ayant la même image dans l'ensemble d'arrivée.

Par exemple, l'application $g : x \mapsto x + |x| - 1$ est-elle une injection de \mathbb{R} dans \mathbb{R} ?

On remarque que $g(0) = -1$ et que $g(-1) = -1$. Deux réels distincts ayant la même image, on en déduit que l'application g n'est pas une injection de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

Remarque : On notera l'importance du choix de l'ensemble de départ et d'arrivée dans ce type de question ; si l'application f était définie de \mathbb{R}^+ dans \mathbb{R}^+ , elle serait alors injective.

2. **Pour montrer qu'une application f d'un ensemble E dans un ensemble F est surjective**, on montre que tout élément de l'ensemble d'arrivée admet au moins un antécédent dans l'ensemble de départ.

$$\forall y \in F, \exists x \in E / f(x) = y$$

Par exemple, l'application $f : (x, y) \mapsto x + 2y^2$ est-elle une surjection de \mathbb{R}^2 sur \mathbb{R} ?

On considère un élément quelconque z de \mathbb{R} ; on remarque que $f(z, 0) = z$ donc z admet au moins un antécédent dans \mathbb{R}^2 , le couple $(z, 0)$.

Par suite, l'application f est une surjection de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} .

Pour montrer qu'une application f d'un ensemble E dans un ensemble F n'est pas surjective, on peut trouver un élément de l'ensemble d'arrivée n'ayant pas d'antécédent par f dans l'ensemble de départ.

Par exemple, l'application $g : x \mapsto -2x^2 + 4$ est-elle une surjection de \mathbb{Z} dans \mathbb{Z} ?

Cherchons s'il existe un entier relatif x tel que $g(x) = 0$:

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow -2x^2 + 4 = 0$$

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 2$$

Cette équation n'a pas de solution dans \mathbb{Z} , donc l'application g n'est pas une surjection de \mathbb{Z} dans \mathbb{Z} .

3. Pour montrer qu'une application f d'un ensemble E dans un ensemble F est bijective, on peut :

- a. Montrer qu'elle est à la fois injective et surjective.
- b. Montrer que l'équation $f(x) = y$ d'inconnue x élément de E admet une unique solution. Cette méthode présente l'avantage de déterminer par le même calcul la bijection réciproque dans le cas où f est bijective.

Exemple

Soit f l'application de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 définie par $(x, y) \mapsto (x + y, x + 1)$. Montrer que f est bijective et déterminer sa bijection réciproque.

Soit (a, b) un élément quelconque de \mathbb{R}^2 :

$$f(x, y) = (a, b) \Leftrightarrow (x + y, x + 1) = (a, b)$$

L'équation $f(x, y) = (a, b)$ admet pour unique solution dans \mathbb{R}^2 le couple $(b - 1; a - b + 1)$. On en déduit que f est une bijection de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 et sa bijection réciproque, notée f^{-1} , est définie par :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, f^{-1}(a, b) = (b - 1; a - b + 1)$$

- c. Montrer que f est la composée de deux bijections.
- d. Dans le cas particulier où f est une application d'une partie de \mathbb{R} dans une partie de \mathbb{R} , on peut utiliser le théorème de bijection : si f est continue et strictement monotone sur un intervalle I , alors f réalise une bijection de I sur $f(I)$.

Exemple

Montrer que la fonction f définie sur \mathbb{R}^{+*} par $f(x) = x + \ln x$ est une bijection de \mathbb{R}^{+*} sur un intervalle que l'on précisera.

La fonction f est continue et strictement croissante sur \mathbb{R}^{+*} donc elle réalise une bijection de \mathbb{R}^{+*} sur $f(\mathbb{R}^{+*})$.

Or, $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Donc f est une bijection de \mathbb{R}^{+*} sur \mathbb{R} .

Étude du sens de variation d'une suite

1. Méthode 1

Pour étudier le sens de variation de la suite (u_n) , on peut étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$.

Exemple

Soit (u_n) la suite de terme général $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k\sqrt{k}}$.

Étudier les variations de la suite (u_n) :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k\sqrt{k}} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k\sqrt{k}}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}}$$

Par suite, $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n \geq 0$; la suite (u_n) est croissante.

2. Méthode 2

Si la suite (u_n) est à termes strictement positifs, on peut comparer le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1.

Exemple

On considère la suite (u_n) définie sur \mathbb{N}^* par $u_n = \frac{2^n}{n!}$. Étudier son sens de variation.

Le terme général de la suite (u_n) comportant des produits, il semble pertinent d'utiliser la méthode 2.

La suite (u_n) est clairement à termes strictement positifs.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{2^n} = \frac{2}{n+1}$$

Comme, par hypothèse, $n \geq 1$, alors $\frac{2}{n+1} \leq 1$.

On peut donc en conclure que la suite (u_n) est décroissante.

3. Méthode 3

On compare directement u_{n+1} et u_n à l'aide de manipulations d'inégalités.

Exemple

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \sqrt{2u_n}$.

On admet que, pour tout entier naturel n , u_n existe et $0 < u_n \leq 2$ (résultat qui se démontre facilement par récurrence). Étudier le sens de variation de la suite (u_n) .

On sait que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_n \leq 2$. On multiplie par u_n qui est positif :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_n^2 \leq 2u_n$$

Par stricte croissance de la fonction racine carrée sur \mathbb{R}^+ , il vient :

$$0 < u_n < \sqrt{2u_n}$$

Soit $0 < u_n \leq u_{n+1}$, ce qui montre que la suite (u_n) est croissante.

4. Méthode 4

Utilisation d'un raisonnement par récurrence.

Exemple

On considère la suite (u_n) définie par son premier terme $u_0 = 1$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{n + u_n}$$

Étudier le sens de variation de la suite (u_n) .

En calculant les premiers termes de la suite, on peut conjecturer que la suite (u_n) est croissante.

On le prouve ensuite par récurrence

On note $P_n : u_n \leq u_{n+1}$.

La propriété est vérifiée pour $n = 0$, puisque $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$.

Soit n un entier naturel tel que P_n .

Sachant P_n , $u_n \leq u_{n+1}$. Comme $n \leq n + 1$, on obtient en ajoutant membre à membre ces deux inégalités de mêmes sens :

$$n + u_n \leq n + 1 + u_{n+1}$$

et, par croissance de la fonction racine carrée sur \mathbb{R}^+ :

$$\sqrt{n + u_n} \leq \sqrt{n + 1 + u_{n+1}}$$

soit $u_{n+1} \leq u_{n+2}$, ce qui établit P_{n+1} et achève le raisonnement par récurrence.

5. Méthode 5

Exploiter les particularités du sujet et le résultat des questions antérieures.

Exemple

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2 - x + 1$ et (u_n) la suite définie par la donnée de son premier terme u_0 et par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$$

a. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq x$.

b. Étudier les variations de la suite (u_n) .

a. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) - x = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$. On peut donc affirmer que, pour tout réel x , $f(x) - x \geq 0$, ce qui démontre le résultat demandé.

b. La fonction f étant définie sur \mathbb{R} , la suite (u_n) est bien définie et, en appliquant le résultat de la question précédente, il vient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(u_n) \geq u_n$$

Soit $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geq u_n$, ce qui montre que la suite (u_n) est croissante.

VUIBERT PRÉPAS, des ouvrages pour faire la différence :

- l'essentiel du cours et des applications pour acquérir les connaissances indispensables,
- de nombreux exercices d'entraînement et sujets de concours intégralement corrigés pour se mettre en situation d'épreuve,
- des fiches méthode pour acquérir les bons réflexes,
- des annexes pour maîtriser les simulations avec Scilab.

SOMMAIRE

Première année : Premier semestre

1. Nombre – Topologie de \mathbb{R} et géométrie dans \mathbb{R}^2 – 2. Calcul algébrique et représentation graphique de fonctions usuelles – 3. Éléments de logique – 4. Ensembles et cardinaux – 5. Calcul matriciel – 6. Systèmes d'équations linéaires – 7. Suites de référence et convergence – 8. Polynômes à une indéterminée – 9. Limites et continuité – Étude locale – 10. Fonctions numériques – Étude globale – 11. Fonctions usuelles – 12. Probabilités finies

Première année : Deuxième semestre

13. Dérivabilité, convexité et fonctions réciproques – 14. Intégration – 15. Séries numériques – 16. Espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ – 17. Espaces probabilisés – 18. Variables aléatoires discrètes – 19. Variables à densité (1)

Deuxième année : Troisième semestre

20. Espaces vectoriels – 21. Applications linéaires – 22. Réduction des endomorphismes et des matrices carrées – 23. Suites et séries – Compléments – 24. Comparaison des fonctions et développements limités – 25. Intégrales impropres – 26. Couples aléatoires discrets – Suites de variables aléatoires

Deuxième année : Quatrième semestre

27. Fonctions de deux variables (1) – 28. Fonctions de deux variables (2) – 29. Variables à densité (2) – 30. Convergence – 31. Estimateurs et estimations.

Sujets incontournables aux concours : A. Fonctions génératrices – B. Processus de Poisson

Annexe : Scilab

Les auteurs :

Bénédicte Bourgeois est professeur en classe préparatoire économique et commerciale au lycée Notre-Dame du GrandChamp à Versailles.

François Delaplace est professeur en classe préparatoire économique et commerciale au lycée Notre-Dame du GrandChamp à Versailles.

Fabrice Fortain dit Fortin est professeur en classe préparatoire économique et commerciale au lycée Notre-Dame du GrandChamp à Versailles.

Émilie Tournesac est professeur en classe préparatoire économique et commerciale au lycée Antonin Artaud à Marseille.

