

Maths

CPGE scientifiques
et CAPES

Mémento



+ de 100 fiches de synthèse et cartes mentales accompagnées de démonstrations et d'exemples de résolution



+ de 150 formules et symboles essentiels à maîtriser et à savoir utiliser



Fiches méthode et conseils pour acquérir les bons réflexes



Repères historiques attendus au programme

Vuibert



python™

+ des fiches et cartes mentales sur Python à télécharger

Maths

CPGE scientifiques
et CAPES

Mémento

Paul Milan diplômé de l'école Centrale, a une longue expérience de l'enseignement des mathématiques notamment au lycée et dans les cursus supérieurs.

Il est également auteur de nombreux ouvrages.

Ressources numériques



**+ des fiches et cartes mentales
complémentaires sur Python™
et son utilisation.**



ISBN : 978-2-311-40710-5

Conception de couverture : Hung Ho Thanh

Conception LaTeX et mise en page : Sébastien Mengin

La loi du 11 mars 1957 n'autorisant aux termes des alinéas 2 et 3 de l'article 41, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale, ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite » (alinéa 1^{er} de l'article 40). Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles 425 et suivants du Code pénal. Des photocopies payantes peuvent être réalisées avec l'accord de l'éditeur. S'adresser au Centre français d'exploitation du droit de copie : 20 rue des Grands Augustins, F-75006 Paris.

Tél. : 01 44 07 47 70

© Vuibert – août 2019 – 5 allée de la 2^e DB, 75015 Paris

SOMMAIRE

Partie 1. Fiches méthode et conseils 7

Conseils et méthode, 8

1. L'entrée en classe préparatoire aux grandes écoles 8
2. Conseils pour bien démarrer son année 8
3. Trois incontournables en mathématiques 8
4. Les 18 conseils pour réussir 9
5. Savoir prendre des notes 11
6. Savoir demander de l'aide 12

La réussite aux contrôles et examens, 14

1. Réaliser les exercices et devoirs 14
2. Résoudre une question, un problème 15
3. Réviser pour les contrôles 15
4. Passer une colle 16
5. Passer une épreuve de concours 17
6. Apprendre de ses erreurs 18

Principes de la rédaction mathématique, 20

1. Ce qui se conçoit bien, s'énonce clairement 20
2. Introduire ce dont on parle 20
3. Mettre en évidence les articulations logiques 21
4. Annoncer ce que l'on fait 21
5. Citer une définition ou un théorème 21
6. Pas de mélange des genres 22
7. Faire la différence entre f et $f(x)$ 22
8. Dériver une fonction 22

Partie 2. Fiches 23

Fiche 1 Ensembles de nombres, 24

Fiche 2 Trinôme du second degré, 26

Fiche 3 Équations et inéquations, 28

Fiche 4 Équations compléments, 30

Fiche 5 Systèmes d'équations, 32

- Fiche 6** Opérations sur les inégalités, 34
- Fiche 7** Suites arithmétiques et géométriques, 36
- Fiche 8** Raisonnement par récurrence, 38
- Fiche 9** Étude d'une suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$, 40
- Fiche 10** Limites d'une suite, 42
- Fiche 11** Compléments sur les suites, 44
- Fiche 12** Étude d'une fonction, 46
- Fiche 13** Symétries et translation d'une courbe, 48
- Fiche 14** Limites d'une fonction, 50
- Fiche 15** Continuité et dérivabilité, 52
- Fiche 16** Dérivées successives et réciproque, 54
- Fiche 17** Tableaux des dérivées, 56
- Fiche 18** Fonctions exponentielle et logarithme (Partie 1), 58
- Fiche 19** Fonctions exponentielle et logarithme (Partie 2), 60
- Fiche 20** Fonctions hyperboliques, 62
- Fiche 21** Fonctions circulaires, 64
- Fiche 22** Fonctions circulaires réciproques, 66
- Fiche 23** Courbes et trajectoires, 68
- Fiche 24** Tableaux des primitives, 70

- Fiche 25** Intégrale d'une fonction continue, 72
- Fiche 26** Intégrale : compléments, 74
- Fiche 27** Équations différentielles du premier et du second ordres, 76
- Fiche 28** Nombres complexes : point de vue de l'algèbre, 78
- Fiche 29** Nombres complexes : point de vue de la géométrie, 80
- Fiche 30** Nombres complexes : compléments, 82
- Fiche 31** Angles et trigonométrie, 84
- Fiche 32** Formulaire de trigonométrie, 86
- Fiche 33** Géométrie plane, 88
- Fiche 34** Géométrie vectorielle dans \mathbb{R}^3 , 90
- Fiche 35** Périmètres et aires des surfaces planes, 92
- Fiche 36** Surfaces et volumes, 94
- Fiche 37** Similitudes et isométries, 96
- Fiche 38** Dénombrement, 98
- Fiche 39** Probabilités discrètes, 100
- Fiche 40** Lois géométrique et binomiale, 102
- Fiche 41** Lois uniforme et exponentielle, 104
- Fiche 42** Lois normales, 106
- Fiche 43** Multiple, division et congruence, 108

Fiche 44 Ensemble quotient $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$, 110

Fiche 45 PGCD, PPCM. Théorèmes de Bézout et de Gauss, 112

Fiche 46 Nombres premiers, 114

Fiche 47 Matrices, 116

Fiche 48 Matrices carrées, 118

Fiche 49 Applications linéaires (ou homomorphisme), 120

Fiche 50 Espaces vectoriels, 122

Fiche 51 Exemples d'espaces vectoriels et dimension, 124

Fiche 52 Anneau des polynômes, 126

Fiche 53 Algorithmes (Partie 1), 128

Fiche 54 Algorithmes (Partie 2), 130

Partie 3. Toutes les formules et symboles mathématiques 133

Partie 4. Tous les repères historiques..... 151

Partie 1

FICHES MÉTHODE ET CONSEILS



Conseils et méthode

1 L'entrée en classe préparatoire aux grandes écoles

Les CPGE, qu'elles soient scientifiques (comme cela va nous intéresser dans cet ouvrage), littéraires ou économiques, font l'objet de nombreuses idées préconçues. Certains s'accordent à dire que la quantité de travail à fournir est colossale, que les cours vont à toute vitesse, que les professeurs sont sévères et ne se soucient pas de leurs étudiants, que les notes sont forcément mauvaises, même pour les meilleurs élèves de lycée ou encore que les mauvais élèves sont parfois humiliés. Ces idées sont passéistes et en aucun cas le reflet des changements et des évolutions qui ont été entrepris en classe prépa. Les enseignants sont très attentifs et à l'écoute de leurs étudiants, la camaraderie est forte entre membres d'une même classe et avec beaucoup de motivation et d'investissement, on peut très bien, et réussir, et bien vivre ses deux années.

Un premier point rassurant : si votre dossier est sélectionné et que vous êtes pris, c'est déjà bon signe. Cela signifie que les enseignants expérimentés de prépa ont inspecté votre dossier et qu'il leur semble possible que vous réussissiez.

Ainsi, la légende des prépas peut faire peur mais si la montagne paraît grande elle n'en reste pas moins surmontable. Trop de travail, les cours qui vont très vite : vous trouverez dans les lignes qui suivent des conseils pour bien réussir et faire la différence ?

2 Conseils pour bien démarrer son année

Avant de présenter quelques conseils pour travailler les mathématiques, sachez que tous le monde étudie différemment et qu'il n'y a pas **une seule façon** d'étudier un programme de mathématiques. Vous serez peut-être en désaccord avec certains d'entre eux. Rien de grave. Le but de ces conseils est seulement de vous aider à faire le maximum en fonction du temps que vous pouvez y consacrer.

On peut distinguer deux types de profils, ceux qui sont satisfaits de leur méthode de travail mais qui sont toujours intéressés d'en savoir davantage et ceux qui ne sont pas satisfaits et qui veulent des idées pour améliorer leur méthode de travail.

Si vous êtes satisfait-e de votre méthode de travail et que vous obtenez les résultats souhaités, il n'y a aucune raison de changer vos habitudes. Vous pouvez cependant confronter votre méthode aux conseils présentés ici.

Si vous n'êtes pas satisfait de votre méthode de travail et que vous êtes à la recherche de moyens pour améliorer vos résultats, soit parce que vous ne savez pas comment travailler, soit parce que vous passez des heures et des heures à étudier sans les résultats espérés, la majorité de ces conseils vous seront utiles et vous permettront d'améliorer votre compétence en mathématiques sans perte de temps.

Ces conseils sont regroupés dans les rubriques : conseils généraux, prendre des notes, exercices et devoirs, préparer un contrôle, une colle, etc.

3 Trois incontournables en mathématiques

Il y a trois grands domaines généraux incontournables.

· Les mathématiques ne sont pas un « sport de spectateurs »

Vous ne pouvez pas apprendre les mathématiques simplement en allant en classe et écouter, comme dans une conférence, l'enseignant faire son cours. Afin d'apprendre les mathématiques vous devez être activement impliqué dans le processus d'apprentissage. Vous devez prêter attention en cours et prendre des notes détaillées. Vous devez faire des exercices même ceux que le professeur ne donnent pas. Vous devez travailler régulièrement et pas seulement la nuit précédant les contrôles.

La régularité est la qualité essentielle pour réussir son année. Si vous travaillez uniquement quelques heures avant un contrôle, votre année sera bien difficile.

· Travailler pour comprendre les principes mathématiques

Mémoriser simplement un ensemble de formules n'est pas suffisant. Certes, il y a des formules à mémoriser, mais vous avez besoin de comprendre comment les utiliser ce qui est très différent de simplement les mémoriser.

Certaines formules ont des restrictions que vous devez savoir afin de les utiliser à bon escient. Par exemple, vous devez déterminer l'ensemble de définition d'une équation avant de la résoudre. Vous devez vous rappeler ceci ou cela sinon votre réponse sera entachée par ce manque de rigueur!

D'autres formules sont très générales et vous obligent à identifier les différentes variables qui correspondent à un problème donné. Si vous ne comprenez pas comment la formule fonctionne et son principe latent, il peut souvent être très difficile de l'utiliser.

Si vous ne pouvez identifier les variables d'une formule pour un problème donné, celle-ci se trouve alors sans valeur.

· Les mathématiques sont une science cumulative

Vous devez toujours avoir conscience que les mathématiques sont une science cumulative. Presque tout ce que vous étudiez dans un cours de mathématiques en prépa dépendra de notions que vous avez déjà apprises : en terminale, en première ou en seconde. Par exemple, dans le cours des nombres complexes en prépa, on rappelle les notions de base, mais on ne peut jamais tout rappeler et, de plus, cela se fait rapidement. De même pour le calcul algébrique, la factorisation, les propriétés des fonctions \exp et \ln , ...

Vous ne pouvez pas calculer une intégrale, sans connaître les primitives des fonctions élémentaires, étudier les polynômes formels sans savoir factoriser, étudier une suite sans connaître les résultats des suites arithmétiques ou géométriques, et étudier une isométrie vectorielle sans connaître les transformations élémentaires dans le plan ...

Ainsi, avec ces trois principes généraux présents à l'esprit, nous allons procéder à des conseils plus spécifiques apparaissant dans les différentes rubriques. Notez que plusieurs de ces conseils incontournables apparaissent dans plusieurs sections car ce sont des conseils *grave importants!*

4 Les 18 conseils pour réussir

Voici quelques conseils généraux qui sont primordiaux et qu'il faut avoir à l'esprit.

· Être rigoureux en classe

Rappelez-vous que les mathématiques sont une science cumulative. Ne pas aller en cours c'est se priver d'un matériel important qui sera utilisé dans les chapitres suivants et/ou se priver de remarques importantes.

Parfois certaines remarques importantes sont données en début de cours.

Afin de pouvoir retravailler votre cours vous avez besoin de tout écouter en classe. Souvent l'attention est difficile, mais cela a son importance. Parfois des idées importantes ne seront pas écrites au tableau mais juste signalées oralement par l'enseignant. Si l'enseignant souligne oralement telle chose, il est alors probable que cela apparaîtra au cours d'un contrôle.

· Prendre des notes de qualité

En cours vous pouvez avoir l'impression de tout comprendre mais ce n'est pas toujours le cas quand vient le temps de faire vous-même un exercice. Des notes bien prises vous aideront à vous rappeler comment résoudre un exercice. Parfois tout écrire s'avère impossible, dans ce cas notez-en le maximum le plus clairement possible.

Ce conseil semble contredire le précédent. Il est souvent difficile à la fois d'écouter et de prendre des notes. Cela se gagne par la pratique. Vous devez être en mesure d'écouter pendant que vous prenez des notes sur les parties importantes du cours. Certains professeurs proposent sur leur site des notes de cours, vous n'aurez alors qu'à les annoter et cela vous permettra de vous décharger d'une tâche importante et d'écouter plus attentivement. Sachez que prendre des notes sans comprendre vous fera perdre énormément de temps lorsque vous reverrez votre cours chez vous.

· Poser des questions

Si vous ne comprenez pas quelque chose, demandez à votre professeur. Il y a des chances que vous ne soyez pas seul-e dans ce cas.

· Écouter quand les autres posent des questions

Lorsqu'un autre étudiant pose des questions, assurez-vous d'avoir écouté la question et la réponse. Il se peut qu'il pensait à quelque chose auquel vous ne pensiez pas du tout.

· Revoir systématiquement ses notes après le cours

Après chaque cours, vous devez revoir vos notes pendant que le cours est encore *frais* dans votre tête. Cela ne prend pas énormément de temps mais vous permettra de formuler ce que vous avez trouvé de déroutant et de poser des questions au prochain cours.

· Réaliser vos propres fiches

Faire un ensemble de fiches avec les formules, les définitions et les théorèmes importants ainsi que quelques exemples permettant d'illustrer ces principes. Elles doivent être concises (un ou deux bostols recto-verso pour un chapitre). Ne mettez pas ce que vous êtes sûr-e de savoir. Utilisez ces fiches pour mémoriser les formules et les concepts importants. Pensez que ces fiches vous permettront, par la suite, de réviser les concours!

· Savoir utiliser les notations correctes

Sachez que vous pouvez perdre des points pour des notations incorrectes. Le correcteur n'est pas nécessairement votre professeur et celui-ci suppose que vous connaissez les notations correctes.

· Travailler en groupe

Il est souvent utile d'étudier en groupe de trois ou quatre. Cela permet de vous donner une dynamique, un éclairage différent et surtout à ne pas vous décourager. La première année de prépa, par son rythme et son exigence est souvent rude et l'entraide est souvent la solution.

· Prévoir suffisamment de temps pour réviser un contrôle

Il faut souvent plus de temps que vous ne pensez pour revoir le cours et préparer un contrôle. En effet, les exercices ou devoirs à faire prennent souvent plus de temps que vous ne le pensiez. Gardez cela à l'esprit lorsque vous programmez votre temps.

· Effectuer les exercices après chaque cours

Prévoyez un peu de temps après chaque cours pour faire les exercices demandés. Cela vous permettra de mieux comprendre le cours et si vous n'arrivez pas à faire un exercice, sa correction au cours suivant sera plus instructive.

Ne pas trouver une solution d'exercice, même en y passant du temps, ne préjuge en rien de votre future réussite aux concours. *Sécher* fait partie de l'activité mathématique.

- **Faire les devoirs sans notes ni livres**

Après les premiers exercices effectués, mettez vos notes et vos livres de côté et essayez de faire les exercices restants. Cela vous permettra de vous entraîner pour les contrôles où les notes sont interdites.

- **Réaliser d'autres exercices**

Ne vous limitez pas aux exercices donnés par le professeur. Plus vous ferez d'exercices différents mieux vous serez préparé.

Posséder des ouvrages dédiés est souvent utile pour réviser et s'entraîner.

- **Pratiquer, pratiquer, pratiquer**

Pratiquez autant que possible. La seule façon de vraiment apprendre à résoudre des problèmes est d'en faire!

- **Persévérer**

La seule façon de vraiment saisir un sujet est de rentrer à la maison et d'y réfléchir. Vous découvrirez qu'avec un peu de travail, un exercice d'abord déroutant vous apparaîtra ensuite plus simple ou même évident. Ce que l'on trouve évident est ce que l'on sait faire.

- **Garder ses anciens contrôles**

Ne jetez pas vos anciens contrôles et leurs corrections. Ces contrôles sont une bonne source de matériel pour corriger des maladresses et des fautes de raisonnement.

- **Ne pas oublier les cours en ligne**

Si vous êtes coincé sur un sujet qui a été vu en classe ou que vous n'avez pu être présent, ne pas oublier que, souvent, les enseignants mettent des notes de cours ainsi que des compléments en ligne. De plus, les sites d'autres enseignants ou des ouvrages vous donneront un éclairage différent et des exemples non vus en classe.

- **Demander de l'aide en cas de besoin**

Si vous rencontrez des problèmes, n'hésitez pas à demander de l'aide à d'autres étudiants de votre classe. N'attendez pas! Cela peut être peu de chose.

- **Avoir la bonne attitude**

Ne faites pas juste ce qui est demandé. Travailler en profondeur les notions permet d'avoir du recul pour aborder la suite.

5 Savoir prendre des notes

Voici quelques conseils pour prendre des notes en classe.

- **Écouter en cours**

Ne vous contentez pas d'écrire ce que vous voyez au tableau. Aucun professeur n'écrit tout ce qu'il dit au tableau et parfois les idées importantes ne seront pas écrites.

- **Écrire des remarques explicatives**

Assurez-vous que vous écrivez les remarques explicatives que le professeur donne. Celles-ci ne seront pas souvent écrites au tableau, mais peuvent vous dire comment travailler un type particulier de problème ou pourquoi le professeur a utilisé telle formule plutôt que telle autre pour un problème donné.

- Remettre en cause ce qui est écrit

Si vous pensez qu'il y a une erreur au tableau, n'hésitez pas à poser une question.

- Annoter le cours

Si vous éprouvez des difficultés à comprendre quelque chose vu en classe, notez cela dans la marge ainsi que les mots clés. Laissez quelques lignes afin de pouvoir noter les détails manquants plus tard, une fois compris ce que vous ne compreniez pas.

- Revoir vos notes

Dès que vous pouvez après le cours, relisez vos notes, recherchez les erreurs ou omissions. Remplissez les informations que vous n'avez pas eu le temps d'écrire.

À intervalle régulier, revoyez vos notes afin de les mémoriser. Si vous avez un doute ou une question n'hésitez pas à prendre un post-it pour la noter tout de suite afin de ne pas l'oublier. Les questions que l'on se pose sont très *volatiles* et l'on ne s'en souvient plus lorsqu'on a l'occasion de les poser.

6 Savoir demander de l'aide

Obtenir de l'aide lorsque vous êtes en difficulté est important. Voici quelques idées pour obtenir de l'aide.

- Obtenir de l'aide quand vous en avez besoin

Ne pas attendre la dernière minute pour obtenir de l'aide. Lorsque vous commencez à avoir des difficultés, il est temps d'obtenir de l'aide. Rappelez-vous que les mathématiques sont une science cumulative. Si l'on ne vous aide pas tout de suite vous serez d'autant plus pénalisé par la suite.

- Poser des questions en classe

Poser des questions est la façon la plus sûre d'obtenir l'aide dont vous avez besoin et de rester activement impliqué dans la classe.

- Former un groupe de travail

Travailler en groupe est très motivant. En effet, différentes perceptions d'un même problème permettent d'entrevoir tous ses aspects pour sa résolution.

- Poser les bonnes questions

Dire « *je ne comprends pas* » ou « *je ne comprends rien* » n'est pas la meilleure façon de demander de l'aide. Soyez précis dans vos questions. Quel est exactement le point que vous ne comprenez pas ? Plus la question est précise plus la réponse vous aidera.

Lorsque vous venez voir quelqu'un pour obtenir de l'aide, assurez la personne de vos tentatives pour résoudre le problème. Encore une fois de nombreux professeurs ne pourront vous aider si vous n'avez pas tenté quelque chose. Cela montre que vous avez travaillé et cela permet d'aiguiller le professeur à comprendre où cela « *coince* ».

