Annales des Concours

PSI
Mathématiques · Informatique
2016

Sous la coordination de

Guillaume Batog
Professeur en CPGE
Ancien élève de l'École Normale Supérieure (Cachan)

Julien Dumont
Professeur en CPGE
Ancien élève de l'École Normale Supérieure (Cachan)

Vincent Puyhaubert
Professeur en CPGE
Ancien élève de l'École Normale Supérieure (Cachan)

Par

Virgile Andreani
ENS Ulm

Guillaume Batog
Professeur en CPGE

Céline Chevalier
Enseignant-chercheur à l'université

Selim Cornet
ENS Cachan

Loïc Devilliers
ENS Cachan

Jean-Julien Fleck
Professeur en CPGE

Matthias Moreno Ray
ENS Lyon

Cyril Ravat
Professeur en CPGE

Antoine Sihrener
Professeur en CPGE

Nicolas Weiss
Professeur agrégé

Sommaire

Centrale-Supélec

Mines-Ponts

Formulaires

Sommaire thématique de mathématiques

2015 – 2016

	Structures algébriques et arithmétique	Polynômes	Algèbre linéaire générale	Réduction des endomorphismes	Produit scalaire et espaces euclidiens	Topologie des espaces vectoriels normés	Suites et séries numériques	Suites et séries de fonctions	Séries entières	Analyse réelle	Intégration	Équations différentielles	Fonctions de plusieurs variables	Dénombrement et probabilités
e3a PSI Maths A			•	••		•	•				•			••
e3a PSI Maths B		•	•		•				•		•			
CCP MP Maths 1								••	•		••			••
CCP MP Maths 2	•	•		••	••									
CCP PC Maths		•	••			•		•			••			••
CCP PSI Maths			•	••		•	•		•			•		
Centrale MP Maths 1			•	•							•			
Centrale MP Maths 2								•			••			•
Centrale PC Maths 1			•	•					•		•	•		•
Centrale PC Maths 2	•	•	•					•		•	•			
Centrale PSI Maths 1			•	•		•	•							••
Centrale PSI Maths 2		•	•								••		•	•
Mines MP Maths 1			•	•	•			•				•		••
Mines MP Maths 2						•	•	•			•			•
Mines PC Maths 1							••		•	•				••
Mines PC Maths 2		•	•				•		•			•		
Mines PSI Maths 1							••		•	•				••
Mines PSI Maths 2			••	•										
X/ENS MP Maths A		•	•	•		•								
X MP Maths B								••		••	•		•	•
X/ENS PC Maths				•						•			•	•

e3a

CONCOURS ARTS ET MÉTIERS ParisTech - ESTP - POLYTECH

Épreuve de Mathématiques 1 PSI

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance.

Exercice 1.

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$b_n = n(a_n - a_{n+1}),\ A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \quad \text{et} \quad B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$$

1. On prend **dans cette question**, pour tout $n \geqslant 1$, $a_n = \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

1.1 Vérifier que la série $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ converge et calculer sa somme.

1.2 Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} n\,x^{n-1}$

1.3 Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ converge et calculer sa somme.

2. On prend dans cette question, $a_n = \dfrac{1}{n\,\ln(n)}$, $n \geqslant 2$ et $a_1 = 0$.

2.1 Etudier la monotonie et la convergence de la suite $(a_n)_{n\geqslant 2}$.

2.2 Quelle est la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} a_n$?

2.3 Calculer $\lim_{n\to+\infty} n\,a_n$.

2.4 Quelle est la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} b_n$?

3. On suppose dans cette question que la série $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ converge et que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante de réels positifs.

3.1 Pour tout entier naturel n non nul, on note $u_n = \sum_{p=n+1}^{2n} a_p$. Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $n\,a_{2n} \leqslant u_n$.

3.2 En déduire $\lim_{n\to+\infty} n\,a_{2n}$.

3.3 Démontrer alors que $\lim_{n\to+\infty} n\,a_n = 0$.

3.4 Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ converge.

3.5 A-t-on $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$?

4. On suppose dans cette question que la série $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ converge et que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est positive, décroissante et de limite nulle.

4.1 Vérifier que : $\forall\, m \in \mathbb{N}^*$, $m \leqslant n$, $\;B_n \geqslant A_m - m\,a_{n+1}$.

4.2 En déduire que la série $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ converge.

4.3 Peut-on en déduire que $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$?

EXERCICE 2.

Pour tout entier naturel n, on note $e_n : x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto x^n \, \mathrm{e}^{-x}$.

Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et E le sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ défini par : $E = \mathrm{Vect}(e_0, e_1, ..., e_N)$.

1. Montrer que $\mathscr{B} = (e_0, e_1, ..., e_N)$ est une base de E. En déduire la dimension de E.

2. Pour tout élément g de E, on note $\Delta(g) = g'$.

2.1 Démontrer que $\Delta \in \mathscr{L}(E)$

2.2 Ecrire la matrice A de Δ dans la base $\mathscr{B}$. Δ est-il un automorphisme de E ?

2.3 Déterminer les éléments propres de Δ. L'endomorphisme Δ est-il diagonalisable ?

3. Soient $k \in [\![0, N]\!]$ et $x \geqslant 0$.

Montrer que la série de terme général $w_n = e_k(x+n)$ est convergente.

4.

4.1 Pour tout entier naturel k, on considère une suite $(u_{n,k})_{n\in\mathbb{N}}$ telle que la série $\sum_{n\geqslant 0} u_{n,k}$ converge .

Citer le théorème du cours qui justifie que l'on a pour tout $N \in \mathbb{N}$: $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{N} u_{n,k}\right) = \sum_{k=0}^{N}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,k}\right)$.

4.2 Soit $f \in E$.

Démontrer que la série de terme général $u_n = f(n+x)$ est convergente pour tout $x \geqslant 0$.

On note alors $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(n+x)$.

4.3 Justifier que la série de terme général $n^j \, \mathrm{e}^{-n}$ pour tout j fixé de $\mathbb{N}$ est convergente.

On note alors $A_j = \sum_{n=0}^{+\infty} n^j \, \mathrm{e}^{-n}$.

4.4 Exprimer $F(x)$ en fonction des A_j pour tout $x \geqslant 0$.

4.5 En déduire que $F \in E$ et que l'application $\Phi : f \longmapsto F$ ainsi définie est un endomorphisme de E.

5. Ecrire la matrice de Φ dans la base $\mathscr{B}$ en fonction des A_j.

L'endomorphisme Φ est-il diagonalisable ?

e3a Maths 1 PSI 2016 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Guillaume Batog (Professeur en CPGE) ; il a été relu par Céline Chevalier (Enseignant-chercheur à l'université) et Benjamin Monmege (Enseignant-chercheur à l'université).

Le sujet est constitué de cinq exercices indépendants.

- Le premier exercice compare la nature d'une série $\sum a_n$, où $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante de réels positifs, à celle de la série $\sum n(a_n - a_{n+1})$. Après l'étude de deux exemples, on démontre que les deux séries sont de même nature, et de même somme en cas de convergence. C'est l'occasion de mettre en pratique un grand nombre de techniques sur les séries numériques.
- Le deuxième exercice étudie deux endomorphismes sur le sous-espace vectoriel E de $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ engendré par les fonctions $x \longmapsto x^n\,\mathrm{e}^{-x}$ pour $0 \leqslant n \leqslant \mathrm{N}$: l'opérateur de dérivation et l'opérateur Φ défini par

$$\forall\, f\in \mathrm{E}\quad \forall\, x\geqslant 0 \qquad \Phi(f)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(x+n)$$

  On justifie qu'il s'agit bien d'endomorphismes de E et on étudie leur diagonalisabilité après avoir écrit leurs matrices dans une base. Aucune connaissance sur les séries de fonctions n'est utile pour l'étude de Φ, on se contente d'outils simples sur les séries numériques.
- Le troisième exercice porte sur le langage Python. D'abord, on doit décrire des programmes donnés dans l'énoncé portant sur les nombres premiers. Ensuite, trois questions amènent à la rédaction d'un programme court qui calcule une liste de couples de nombres premiers jumeaux, c'est-à-dire de la forme $(p, p+2)$ avec p et $p+2$ premiers. Enfin, on détermine les valeurs prises par une fonction Python définie (doublement) récursivement.
- Le quatrième exercice commence par des questions de cours sur les images, noyaux et éléments propres d'un endomorphisme. La suite est indépendante et porte (sans le dire) sur la construction des projecteurs spectraux d'une matrice $\mathrm{M}\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, possédant n valeurs propres distinctes, à partir des vecteurs propres de M et de ${}^t\mathrm{M}$. L'étude est entièrement matricielle, avec une légère excursion dans la structure euclidienne canonique de $\mathbb{R}^n$.
- Le cinquième exercice s'intéresse à l'image $\mathrm{Y} = \Phi(\mathrm{X})$ d'une variable aléatoire réelle X par la fonction intégrale Φ définie par

$$\forall\, x\in\mathbb{R} \qquad \Phi(x) = \int_0^1 \max(x,t)\,\mathrm{d}t$$

  Après avoir étudié la fonction Φ, on traite les cas particuliers d'une variable X suivant une loi géométrique, une loi binomiale et une loi artificielle de support constitué de quatre valeurs. Les outils de probabilités sont de niveau 1re S (tableau d'une loi, calcul d'espérance) et les techniques de calcul de niveau collège (addition de fractions). Cet exercice devait être traité très rapidement.

Globalement, ce sujet teste la maîtrise du calcul (sommes, matrices, fractions) et les compétences de base sur les chapitres abordés, tout en proposant des exercices originaux et accessibles au plus grand nombre des étudiants.

Indications

Exo1-1.1 C'est une série géométrique.

Exo1-1.2 C'est une série dérivée.

Exo1-1.3 Prendre $x = 1/2$ dans la série de la question 1.2.

Exo1-2.2 Effectuer une comparaison série/intégrale.

Exo1-2.3 Développer l'écriture de b_n et trouver un équivalent de b_n à l'aide de développements limités en 0 de $\ln(1+h)$ et $1/(1+h)$.

Exo1-3.1 Utiliser la décroissance de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exo1-3.2 Majorer la somme par le reste d'une série convergente.

Exo1-3.3 Montrer que $0 \leqslant na_n \leqslant 4\,\lfloor n/2\rfloor\ a_{2\lfloor n/2\rfloor}$ pour tout $n \geqslant 2$.

Exo1-3.4 Faire apparaître un terme télescopique dans l'écriture de b_n.

Exo1-4.1 À l'aide d'une décomposition télescopique de b_n obtenue à la question 3.4, démontrer que $\mathrm{B}_n = \mathrm{A}_{n+1} - (n+1)\,a_{n+1}$ pour tout $n \geqslant 1$. Puis étudier le signe de $\mathrm{B}_n - \mathrm{A}_m + m\,a_{n+1}$ pour $m \leqslant n$.

Exo1-4.2 Considérer $p = n - m \geqslant 0$ dans l'inégalité de la question 4.1 ; puis faire tendre p vers $+\infty$ pour $m \in \mathbb{N}^*$ quelconque fixé.

Exo2-1 Utiliser la définition de la liberté.

Exo2-2.1 Montrer que, pour toute fonction $g \in \mathrm{E}$, la dérivée $\Delta(g)$ est bien dans E en calculant les dérivées des fonctions e_k pour $0 \leqslant k \leqslant \mathrm{N}$.

Exo2-2.3 Raisonner sur la matrice A.

Exo2-3 Comparer la série $\sum w_n$ avec une série de Riemann.

Exo2-4.2 Partir d'une décomposition $\lambda_0 e_0 + \cdots + \lambda_{\mathrm{N}} e_{\mathrm{N}}$ de f dans E ($\lambda_i \in \mathbb{R}$).

Exo2-4.4 Reprendre la décomposition de f introduite à la question 4.2, échanger les sommes dans l'expression de $\mathrm{F}(x)$ puis utiliser la formule du binôme.

Exo3-1.1 Attention à l'indentation de l'instruction `return True`.

Exo3-1.3 Écrire une boucle `while` avec une variable `p` incrémentée à chaque étape.

Exo3-1.4a Utiliser la fonction `nextPrime` pour ne tester que des nombres premiers.

Exo3-1.4b L'énoncé interdit d'utiliser la fonction `jumeau`.

Exo3-2.4 Traiter d'abord le cas où $n \in [\![\, 90\,;100\,]\!]$, puis le cas où $n < 90$ en introduisant le plus petit entier $k \in \mathbb{N}$ tel que $n + 11k \geqslant 90$.

Exo4-P.4 Trouver des relations sur les multiplicités des valeurs propres.

Exo4-1 Montrer que M et ${}^t\mathrm{M}$ ont le même polynôme caractéristique.

Exo4-2 Démontrer que $(\lambda_i - \lambda_j)\,{}^t\mathrm{V}_i\ \mathrm{W}_j = 0$ à partir des définitions de V_i et W_j.

Exo4-3 Raisonner par l'absurde en se rappelant que le vecteur nul est le seul vecteur orthogonal à tous les vecteurs d'un espace euclidien.

Exo4-5 La matrice B_k est le produit d'une colonne par une ligne. Pour le calcul de ${\mathrm{B}_k}^2$, se souvenir que le produit d'une ligne par une colonne n'est rien d'autre qu'un scalaire.

Exo4-6 Calculer PV_i et QV_i pour tout $i \in [\![\, 1\,;n\,]\!]$.

Exo5-1.2 Distinguer trois cas suivant la position de x par rapport à 0 et 1.

Exo5-2 Les valeurs de X sont toutes supérieures à 1.

Exo5-3.2 Remarquer que $\mathrm{Y}(\omega) = \Phi\big(\mathrm{X}(\omega)\big)$ pour tout $\omega \in \Omega$.

Exo5-4.3 Déterminer les produits possibles entre une image de X et une image de Y.

Exo5-4.4 Passer son chemin ! Sinon, décomposer les entiers en produits de facteurs premiers afin de simplifier les calculs sur les fractions.

Exercice 1

Exo1-1.1 La série $\sum a_n$ est géométrique de raison $1/2 \in \,]-1\,;1\,[$ donc

$$\boxed{\text{La série } \sum a_n \text{ converge.}}$$

Sa somme vaut
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n-1}} \underset{[k=n-1]}{=} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{1-1/2} = 2$$

soit
$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = 2}$$

Exo1-1.2 La série entière $\sum nx^{n-1}$ est la série dérivée de la série entière $\sum x^n$ de rayon 1. D'après le cours, ces deux séries entières ont même rayon de convergence d'où

$$\boxed{\text{Le rayon de convergence de la série entière } \sum nx^{n-1} \text{ vaut 1.}}$$

Exo1-1.3 Pour tout $n \geqslant 1$,

$$b_n = n\,(a_n - a_{n+1}) = n\left(\frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^n}\right) = \frac{n}{2^n} = \frac{1}{2} \cdot n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

En prenant $x = 1/2 \in \,]-1\,;1\,[$ dans la question 1.2, on conclut par linéarité que

$$\boxed{\text{La série } \sum b_n \text{ converge.}}$$

On peut dériver terme à terme la somme d'une série entière sur son disque ouvert de convergence. Ici, si $x \in \,]-1\,;1\,[$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x^n\right] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\sum_{n=1}^{+\infty} x^n\right]$$

d'où
$$\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\sum_{n=0}^{+\infty} x^n - 1\right] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{1}{1-x} - 1\right] = \frac{1}{(1-x)^2}$$

soit
$$\sum_{n=1}^{+\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$$

Pour $x = 1/2$, on a
$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = \frac{1/2}{(1-1/2)^2} = 2}$$

Exo1-2.1 La suite $(n \ln n)_{n\geqslant 2}$ est croissante de limite $+\infty$ car c'est le produit de deux fonctions usuelles positives qui le sont. Par inverse,

$$\boxed{\text{La suite } (a_n)_{n\geqslant 2} \text{ est décroissante de limite nulle.}}$$

Exo1-2.2 La fonction $x \longmapsto 1/(x \ln x)$ est positive et décroissante sur $[\,2\,;+\infty\,[$. Par croissance de l'intégrale sur $[\,k\,;k+1\,]$ pour $k \geqslant 2$,

$$\forall\, k \geqslant 2 \qquad a_k = \frac{1}{k \ln k} = \int_k^{k+1} \frac{1}{k \ln k}\,\mathrm{d}x \geqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{x \ln x}\,\mathrm{d}x$$

Sommons cette inégalité pour k allant de 2 à $n \geqslant 2$. D'après la relation de Chasles,

$$\forall\, n \geqslant 2 \qquad \mathrm{A}_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = 0 + \sum_{k=2}^{n} a_k \geqslant \sum_{k=2}^{n} \int_k^{k+1} \frac{1}{x \ln x}\,\mathrm{d}x = \int_2^{n+1} \frac{1}{x \ln x}\,\mathrm{d}x$$

Or, $\displaystyle\int_2^{n+1} \frac{1}{x \ln x}\,\mathrm{d}x = \Big[\ln|\ln x|\Big]_2^{n+1} = \ln\big(\ln(n+1)\big) - \ln(\ln 2) \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$

Par comparaison, la suite $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ des sommes partielles de la série $\sum a_n$ diverge, c'est-à-dire que

$$\boxed{\text{La série } \sum a_n \text{ diverge.}}$$

> La série $\sum a_n$ est une série de Bertrand $\sum 1/\big[n^\alpha\,(\ln n)^\beta\big]$ avec $\alpha = \beta = 1$. Rappelons que ces séries ne sont pas au programme, ce qui nécessite d'étudier leur nature à la main. Si $\alpha \neq 1$ ou $\alpha = 1$ et $\beta \geqslant 0$, il suffit de comparer la série de Bertrand à une série de Riemann. Sinon, une comparaison série/intégrale permet de répondre.

Exo1-2.3 Pour $n \geqslant 2$, $\qquad na_n = 1/\ln n$

d'où
$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} na_n = 0}$$

Exo1-2.4 Déjà, comme la suite $(a_n)_{n\geqslant 2}$ est décroissante (question 2.1), la suite $(b_n)_{n\geqslant 2}$ est positive à partir du rang 2. Ensuite, pour tout $n \geqslant 2$,

$$0 \leqslant b_n = n\left(\frac{1}{n\ln n} - \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}\right) = \frac{1}{\ln n} - \frac{n}{n+1} \times \frac{1}{\ln(n+1)}$$

Déterminons un équivalent de b_n à l'aide d'un développement limité. D'une part,

$$\frac{n}{n+1} = \frac{1}{1+1/n} = 1 - \frac{1}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$$

D'autre part, $\quad \ln(n+1) = \ln n + \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = \ln n + \dfrac{1}{n} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$

d'où
$$\frac{1}{\ln(n+1)} = \frac{1}{\ln n}\cdot\frac{1}{1+\mathrm{o}(1/n)} = \frac{1}{\ln n}\left[1 - \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right]$$

Finalement,
$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\ln n} - \frac{1}{\ln n}\left[1 - \frac{1}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right]\left[1 + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right] \\ &= \frac{1}{\ln n}\left[1 - 1 + \frac{1}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right] \end{aligned}$$

$$b_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\ln n}\cdot\frac{1}{n} = a_n$$

D'après le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs, la question 2.2 implique que

$$\boxed{\text{La série } \sum b_n \text{ diverge.}}$$

Exo1-3.1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante, on a $a_{2n} \leqslant a_k$ pour tout $k \in [\![\, n+1\,;2n\,]\!]$. En sommant ces $2n-(n+1)+1 = n$ inégalités, on obtient

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}^* \quad na_{2n} \leqslant \sum_{k=n+1}^{2n} a_k = u_n}$$

e3a Maths 2 PSI 2016 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Antoine Sihrener (Professeur en CPGE) ; il a été relu par Alban Levy (ENS Cachan) et Nicolas Martin (Professeur agrégé).

Ce sujet a pour but le calcul de la somme

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

ainsi que l'étude de la fonction H définie sur $]-1\,; +\infty[$ par

$$\mathrm{H}(x) = \int_0^1 \frac{t^x \ln(t)}{t-1}\,\mathrm{d}t$$

- Dans une partie préliminaire, on étudie la famille de polynômes

$$\mathrm{P}_n = \frac{1}{2i}\left[(\mathrm{X}+i)^{2n+1} - (\mathrm{X}-i)^{2n+1}\right]$$

  Plus précisément, on va chercher le degré, le coefficient dominant, les racines de P_n et on s'en servira pour calculer la somme $\zeta(2)$. Cette partie n'utilise que des résultats au programme de première année ; elle est abordable, sous réserve d'être à l'aise avec les polynômes.

- Dans la partie 1, on détermine le domaine de définition de H, sa monotonie, sa limite en $+\infty$ et on exprime H comme somme d'une série de fonctions. Les questions ont pour thème les intégrales à paramètres et sont des applications directes du cours.

- La partie 2 permet d'écrire $\mathrm{H}(-1/2)$ sous la forme d'une intégrale. Elle contient des questions classiques d'encadrement d'intégrales et de convergence de séries, mais aussi une question délicate d'interversion série/intégrale.

- Dans la partie 3, on cherche à développer H en série entière au voisinage de 0. Les calculs d'intégrales sont classiques mais justifier la convergence des séries entières requiert des arguments fins.

En conclusion, ce problème relativement long contient énormément de questions proches du cours. Il pourra être utilisé avec profit pendant l'année pour vérifier que les théorèmes relatifs à l'intégration (continuité, dérivabilité sous l'intégrale et convergence dominée) sont maîtrisés.

Indications

Préliminaires

P.1 Se souvenir qu'un réel strictement positif a un argument nul et qu'un réel strictement négatif a un argument égal à π.

P.2.1.2 Utiliser le théorème caractérisant les polynômes irréductibles sur $\mathbb{R}$.

P.2.2.1 Appliquer la formule du binôme de Newton et calculer les coefficients des termes X^{2n+1} et X^{2n}.

P.2.2.3 Écrire $i^{2n} = (i^2)^n = (-1)^n$.

P.2.2.4 Si z est racine de P_n, en particulier on a $|z-i| = |z+i|$.

P.2.2.5 Écrire $(a+i)^{2n+1} = (a-i)^{2n+1}$, diviser par $(a-i)^{2n+1}$ et faire apparaître des racines de l'unité.

P.2.2.6 Utiliser la méthode de l'arc-moitié, puis les formules d'Euler.

P.2.2.7 Montrer que les coefficients de degré impair sont nuls, et effectuer ensuite un changement d'indice. Se rappeler que $i^{2k} \in \mathbb{R}$ pour tout entier k.

P.2.2.9 Compter les racines de P_n positives, utiliser la stricte croissance de la fonction $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}_+$ et compter le nombre de racines de Q_n ainsi obtenues.

P.3 Écrire Q_n sous forme factorisée et donner le coefficient de X^{n+1} de deux façons différentes.

P.4 Utiliser l'égalité $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.

P.5 Vérifier que les $k\pi/(2n+1) \in \,]\,0\,;\pi/2\,[$ pour tout $k \in [\![\,1\,;n\,]\!]$, appliquer la question précédente ainsi que le théorème d'encadrement.

Partie 1

I.1 Pour la convergence, comparer à une intégrale de Riemann. Pour la valeur, penser à une intégration par parties.

I.2.1 Si $x > -1$, faire comme dans la question précédente au voisinage de 0, et poser $u = 1-t$ quand t est au voisinage de 1. Si $x \leqslant -1$, comparer à la fonction inverse.

I.2.2 Prendre $x \leqslant y$ et donner le signe de $H(x) - H(y)$.

I.2.3 Prolonger par continuité en 0 et en 1.

I.2.4 Appliquer le théorème de dérivation sous l'intégrale sur un intervalle de la forme $[\,\alpha\,;+\infty\,[$ pour $\alpha > -1$.

I.2.5 Appliquer le théorème de convergence dominée. Supposer que $x_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis utiliser la caractérisation séquentielle de la limite.

I.2.6 Écrire $H(x) - H(x+1)$ sous forme d'une seule intégrale et utiliser la question 1.

I.2.7 Utiliser la formule précédente et la continuité de H en 0.

I.2.8.2 Écrire la question 2.6 pour $x+k$ en lieu de x et sommer pour k allant de 0 à $n-1$.

I.2.8.4 Utiliser la question 5 des préliminaires.

Partie 2

II.1 La fonction intégrée est décroissante : sa valeur en $t \in [\,k\,;k+1\,]$ est comprise entre sa valeur en k et sa valeur en $k+1$.

II.2 Sommer les inégalités obtenues à la question précédente pour k allant de 1 à $+\infty$.

II.3.1 Pour $(-1)^n u_n$, appliquer le critère des séries alternées.

II.3.2 Séparer en deux la somme en l'indice N. Utiliser le critère des séries alternées pour majorer le reste et utiliser la question I.2.5.

II.3.3 Faire le changement de variable $t = v^2$ dans l'intégrale définissant $\mathrm{H}(-1/2)$.

Partie 3

III.1.1 Faire une intégration par parties.

III.1.2 Faire une récurrence sur q.

III.2.2 Calculer la somme $\sum\limits_{p=0}^{+\infty} \mathrm{I}_{p,q}$ pour $q \geqslant 1$. Intervertir la somme et l'intégrale.

III.3 Montrer que H est de classe $\mathscr{C}^\infty$ en dérivant sous l'intégrale. Donner $\mathrm{H}^{(n)}(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que le rayon de convergence de son développement en série entière est supérieur ou égal à 1 en montrant que la suite $(\mathrm{Z}_k)_{k\geqslant 2}$ est décroissante.

III.4 Montrer que $\mathrm{Z}_k \geqslant 1$ pour tout $k \geqslant 2$.

Préliminaires.

P.1 Calculons le module de u :

$$|u|^2 = u \times \overline{u} = \left(1 + e^{i\theta}\right) \times \left(1 + e^{-i\theta}\right) = 1 + e^{i\theta} + e^{-i\theta} + 1 = 2 + 2\cos(\theta)$$

Un module étant positif, $|u| = \sqrt{2(1+\cos(\theta))}$. Donnons à présent un argument de u s'il en existe. u a un argument si et seulement si u n'est pas nul. Or, $u = 0$ si et seulement si $e^{i\theta} = -1$, c'est-à-dire si et seulement si $\theta = \pi$ (car $\theta \in [\,0\,;2\pi\,[$). Supposons dans la suite $\theta \neq \pi$. Ainsi, $u \neq 0$ et

$$u = e^{i\theta/2}\left(e^{-i\theta/2} + e^{i\theta/2}\right) = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\theta/2}$$

Étudions deux cas.

- Si $\theta \in \,]\,0\,;\pi\,[$ alors $\theta/2 \in \,]\,0\,;\pi/2\,[$ et $\cos(\theta/2) > 0$. Par conséquent, 0 est un argument du cosinus, et un argument de u est $\theta/2$.
- Si $\theta \in \,]\,\pi\,;2\pi\,[$ alors $\theta/2 \in \,]\,\pi/2\,;\pi\,[$ et $\cos(\theta/2) < 0$. Ainsi, π est un argument de $\cos(\theta/2)$, et un argument de u est $\pi + (\theta/2)$.

En conclusion,

$$\boxed{|u| = \sqrt{2(1+\cos(\theta))} \qquad \text{et} \qquad \arg(u) = \begin{cases} \theta/2 & \text{si } \theta \in \,]\,0\,;\pi\,[\\ \pi + \theta/2 & \text{si } \theta \in \,]\,\pi\,;2\pi\,[\end{cases}}$$

P.2.1.1 Par définition de P_1, et d'après la formule du binôme de Newton,

$$\mathrm{P}_1 = \frac{1}{2i}\left[\mathrm{X}^3 + 3i\mathrm{X}^2 + 3i^2\mathrm{X} + i^3 - \left(\mathrm{X}^3 - 3i\mathrm{X}^2 + 3i^2\mathrm{X} - i^3\right)\right]$$

En se souvenant que $i^2 = -1$ et $i^3 = -i$, il vient

$$\boxed{\mathrm{P}_1 = \frac{1}{2i}\left[6i\mathrm{X}^2 - 2i\right] = 3\mathrm{X}^2 - 1}$$

De la même façon, en se souvenant que $i^4 = 1$ et $i^5 = i$,

$$\begin{aligned} \mathrm{P}_2 &= \frac{1}{2i}[\mathrm{X}^5 + 5i\mathrm{X}^4 + 10i^2\mathrm{X}^3 + 10i^3\mathrm{X}^2 + 5i^4\mathrm{X} + i^5 \\ &\qquad - \left(\mathrm{X}^5 - 5i\mathrm{X}^4 + 10i^2\mathrm{X}^3 - 10i^3\mathrm{X}^2 + 5i^4\mathrm{X} - i^5\right)] \\ &= \frac{1}{2i}\left[10i\mathrm{X}^4 + 20i^3\mathrm{X}^2 + 2i^5\right] \end{aligned}$$

c'est-à-dire $$\boxed{\mathrm{P}_2 = 5\mathrm{X}^4 - 10\mathrm{X}^2 + 1}$$

P.2.1.2 D'après la question précédente, tous les coefficients étant réels

$$\boxed{\mathrm{P}_1 \in \mathbb{R}_2[\mathrm{X}] \qquad \text{et} \qquad \mathrm{P}_2 \in \mathbb{R}_4[\mathrm{X}]}$$

P_1 admet $\pm 1/\sqrt{3}$ comme racines réelles donc n'est pas irréductible dans $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$. De plus, les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ sont les polynômes de degré 1 et ceux de degré 2 de discriminant strictement négatif. Puisque P_2 est de degré 4, il n'est pas irréductible.

$$\boxed{\mathrm{P}_1 \text{ et } \mathrm{P}_2 \text{ ne sont pas irréductibles dans } \mathbb{R}[\mathrm{X}].}$$

CCP Maths PSI 2016 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Sélim Cornet (ENS Cachan) ; il a été relu par Tristan Poullaouec (Professeur en CPGE) et Antoine Sihrener (Professeur en CPGE).

L'épreuve est constituée d'un seul problème, portant sur l'étude des puissances d'une matrice stochastique. Les matrices stochastiques sont les matrices réelles à coefficients positifs dont la somme des coefficients de chaque ligne vaut 1. Ces matrices apparaissent notamment en modélisation de phénomènes aléatoires (d'où leur nom, stochastique étant synonyme d'aléatoire).

- La partie I propose de calculer explicitement le terme général de la suite des puissances d'une matrice stochastique de taille 2×2. On applique ensuite ce résultat au calcul de la probabilité de bonne transmission d'un signal binaire à travers un ensemble de relais.
- Dans la partie II, on démontre plusieurs résultats portant sur les éléments propres d'une matrice stochastique, notamment que 1 est valeur propre et que toute valeur propre est de module inférieur ou égal à 1. On affine ces résultats dans le cas d'une matrice stochastique à coefficients strictement positifs, en montrant que 1 est valeur propre simple et que toute autre valeur propre est de module strictement inférieur à 1.
- Les résultats de la partie II sont mis en application dans la partie III. On y étudie une certaine marche aléatoire sur un graphe à 4 sommets, et en particulier son comportement après un temps très long.
- Enfin, on prouve dans la partie IV que la suite des puissances d'une matrice stochastique à coefficients strictement positifs converge vers une matrice stochastique dont toutes les lignes sont égales.

Les parties sont indépendantes, à l'exception de la partie III qui nécessite d'utiliser certains résultats obtenus dans la partie II. Ce sujet balaie une vaste partie du programme (algèbre linéaire, probabilités, suites numériques) et constitue une bonne occasion d'entraînement et de révision. Attention toutefois, les questions sont de difficultés assez inégales : certaines ne demandent que des raisonnements classiques, d'autres requièrent plus de recherche et d'initiative.

Indications

Partie I

1 Déterminer le noyau de $\mathrm{A}(\alpha, \beta) - \mathrm{I}_2$.

2 Il se pourrait qu'une deuxième valeur propre soit donnée par l'énoncé...

3 Utiliser la diagonalisation obtenue à la question précédente.

5 Appliquer la formule des probabilités totales pour obtenir la première relation. En déduire par récurrence une relation entre la loi de X_n et celle de X_0. Appliquer à nouveau la formule des probabilités totales pour calculer la probabilité de bonne transmission des messages 0 et 1. Pour l'inégalité, distinguer les cas $\alpha \leqslant \beta$ et $\alpha \geqslant \beta$. On écrira la probabilité de bonne transmission comme la somme de $r + (1-r)(1-\alpha-\beta)^n$ et d'une quantité positive.

6 Tirer parti du fait que les variables aléatoires $\mathrm{X}_n^1, \cdots, \mathrm{X}_n^\ell$ sont indépendantes.

Partie II

10 Utiliser la caractérisation donnée par la question 9.

11 Remarquer que la question 10 autorise à ne traiter que le cas $p = 1$. Majorer alors chacune des composantes du vecteur $\mathrm{A}x$.

12 En exploitant les résultats des questions 9 et 11, montrer successivement que $\rho(\mathrm{A}) \leqslant 1$ et $\rho(\mathrm{A}) \geqslant 1$.

13 Considérer un vecteur propre x associé à λ, et choisir i comme l'indice de la coordonnée de x de plus grand module.

14 Utiliser la question 13 pour montrer que 0 n'est pas valeur propre de A.

15 Vérifier que la définition d'une matrice à diagonale strictement dominante est satisfaite, en notant que l'inégalité stricte provient du fait que les coefficients de A sont strictement positifs.

16 Utiliser les questions 9 et 15.

17 Considérer une valeur propre de module 1 et utiliser la question 13.

Partie III

18 Appliquer la formule des probabilités totales pour calculer $\mathbb{P}(\mathrm{X}_1 = i)$ pour tout i.

19 Utiliser les questions 9 et 16.

21 On peut observer qu'il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{Q} - \mu \mathrm{I}_4$ soit de rang 1. Le déterminer.

22 Considérer une base orthonormée de vecteurs propres et appliquer les formules de changement de base. Pour la seconde partie, calculer $\mathrm{Q}^p - \mathrm{R}$ pour $p \in \mathbb{N}^*$ et utiliser l'homogénéité de la norme.

Partie IV

23 Les deuxième et quatrième inégalités s'obtiennent en comparant les coefficients de A^{p+1} à ceux de A^p.

24 Exprimer les coefficients de A^{p+1} en fonction de ceux de A^p en faisant apparaître le terme correspondant au minimum ou au maximum.

25 Utiliser la question 24.

26 Utiliser les questions 23 et 25.

I. Cas $n = 2$

1 Par définition, $$\mathrm{A}(\alpha,\beta) - \mathrm{I}_2 = \begin{pmatrix} -\alpha & \alpha \\ \beta & -\beta \end{pmatrix}$$

Remarquons que la deuxième colonne est l'opposée de la première, et comme (α,β) est non nul, la matrice est donc de rang 1. D'après le théorème du rang,

$$\dim(\mathrm{Ker}\,(\mathrm{A}(\alpha,\beta) - \mathrm{I}_2)) = 2 - \mathrm{rg}\,(\mathrm{A}(\alpha,\beta) - \mathrm{I}_2) = 1$$

Cela montre que 1 est valeur propre et comme le sous-espace propre associé est de dimension 1, il suffit de déterminer un de ses vecteurs non nuls pour en obtenir une base. Si ${}^t(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}\,(\mathrm{A}(\alpha,\beta) - \mathrm{I}_2) &\iff \begin{cases} -\alpha x + \alpha y = 0 \\ \beta x - \beta y = 0 \end{cases} \\ &\iff x = y \qquad \text{car } (\alpha,\beta) \neq (0,0) \end{aligned}$$

Ceci prouve que

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Le réel 1 est valeur propre de } \mathrm{A}(\alpha,\beta)\text{, de sous-espace} \\ \text{propre associé } \mathrm{Ker}\,(\mathrm{A}(\alpha,\beta) - \mathrm{I}_2) = \mathrm{Vect}\,\{{}^t(1,1)\}.\end{array}}$$

> Le calcul du polynôme caractéristique est inutile ici car il ne donne aucune information sur les sous-espaces propres. Cette méthode est à réserver aux cas où on ne connaît pas a priori les valeurs propres.

2 La notation $\lambda = 1-(\alpha+\beta)$ introduite dans l'énoncé incite à penser que λ pourrait être valeur propre de $\mathrm{A}(\alpha,\beta)$. Vérifions-le.

$$\mathrm{A}(\alpha,\beta) - \lambda\mathrm{I}_2 = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1-(\alpha+\beta) & 0 \\ 0 & 1-(\alpha+\beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

Remarquons que les deux lignes sont identiques, et non nulles car $(\alpha,\beta) \neq (0,0)$. La matrice $\mathrm{A}(\alpha,\beta) - \lambda\mathrm{I}_2$ est donc de rang 1, par suite λ est valeur propre de $\mathrm{A}(\alpha,\beta)$ et le sous-espace propre associé est de dimension 1 d'après le théorème du rang. De plus, comme α et β sont positifs non tous deux nuls, $\alpha+\beta > 0$ d'où $\lambda \neq 1$. Finalement,

$$\boxed{\mathrm{A}(\alpha,\beta) \text{ possède deux valeurs propres distinctes, elle est donc diagonalisable.}}$$

> Si l'on ne remarque pas que λ est valeur propre, le calcul du polynôme caractéristique χ s'avère alors nécessaire.
>
> $$\begin{aligned} \chi &= \mathrm{X}^2 - \mathrm{Tr}\,(\mathrm{A}(\alpha,\beta))\mathrm{X} + \det(\mathrm{A}(\alpha,\beta)) \\ &= \mathrm{X}^2 - (2-(\alpha+\beta))\mathrm{X} + (1-(\alpha+\beta)) \end{aligned}$$
>
> Son discriminant vaut
>
> $$\Delta = (2-(\alpha+\beta))^2 - 4(1-(\alpha+\beta)) = (\alpha+\beta)^2$$
>
> et puisque $\sqrt{\Delta} = |\alpha+\beta| = \alpha+\beta$, on retrouve bien les valeurs propres
>
> $$r_1 = \frac{2-(\alpha+\beta)+\sqrt{(\alpha+\beta)^2}}{2} = 1 \;;\; r_2 = \frac{2-(\alpha+\beta)-\sqrt{(\alpha+\beta)^2}}{2} = \lambda$$

Pour obtenir les matrices de passage, il reste à déterminer un vecteur propre associé à λ. Si ${}^t(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker}(\mathrm{A}(\alpha,\beta) - \lambda \mathrm{I}_2) \iff \begin{cases} \beta x + \alpha y = 0 \\ \beta x + \alpha y = 0 \end{cases}$$
$$\iff \beta x = -\alpha y$$

Le vecteur non nul ${}^t(\alpha, -\beta)$ est donc un vecteur propre associé à λ. Si l'on pose

$$\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & -\beta \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

alors
$$\mathrm{A}(\alpha,\beta) = \mathrm{PDP}^{-1}$$

Calculons P^{-1} par opérations élémentaires.

> Pour calculer l'inverse d'une matrice P, on effectue des opérations élémentaires soit sur les lignes, soit sur les colonnes, mais pas les deux, au risque d'obtenir des résultats erronés.

On part de
$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \alpha & 1 & 0 \\ 1 & -\beta & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Effectuons
$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \alpha & 1 & 0 \\ 0 & -(\alpha+\beta) & -1 & 1 \end{array}\right) \qquad \mathrm{L}_1 \leftarrow \mathrm{L}_2 - \mathrm{L}_1$$

Continuons avec
$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \dfrac{1}{\alpha+\beta} & -\dfrac{1}{\alpha+\beta} \end{array}\right) \qquad \mathrm{L}_2 \leftarrow -\frac{\mathrm{L}_2}{\alpha+\beta}$$

Terminons par
$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \dfrac{\beta}{\alpha+\beta} & \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta} \\ 0 & 1 & \dfrac{1}{\alpha+\beta} & -\dfrac{1}{\alpha+\beta} \end{array}\right) \qquad \mathrm{L}_1 \leftarrow \mathrm{L}_1 - \alpha \mathrm{L}_2$$

On obtient finalement $\mathrm{P}^{-1} = \dfrac{1}{\alpha+\beta}\begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, avec $\alpha+\beta \neq 0$, et

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Pour tout couple de réels } (\alpha,\beta) \in [0,1]^2 \backslash \{(0,0)\}, \\ \text{la matrice } \mathrm{A}(\alpha,\beta) \text{ est égale à } \mathrm{P}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\mathrm{P}^{-1} \text{ avec} \\ \mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & -\beta \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{P}^{-1} = \dfrac{1}{\alpha+\beta}\begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \end{array}}$$

3 Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a $\mathrm{A}(\alpha,\beta)^p = (\mathrm{PDP}^{-1})^p = \mathrm{PD}^p\mathrm{P}^{-1}$. La matrice D étant diagonale, on trouve directement que pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{D}^p = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda^p \end{pmatrix}$$

En calculant le produit matriciel $\mathrm{PD}^p\mathrm{P}^{-1}$, on en déduit

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N} \quad \forall (\alpha,\beta) \in [0,1]^2 \backslash \{(0,0)\} \quad \mathrm{A}(\alpha,\beta)^p = \frac{1}{\alpha+\beta}\begin{pmatrix} \beta + \alpha\lambda^p & \alpha(1-\lambda^p) \\ \beta(1-\lambda^p) & \alpha + \beta\lambda^p \end{pmatrix}}$$

CCP Informatique PSI 2016 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Jean-Julien Fleck (Professeur en CPGE) ; il a été relu par Vincent Puyhaubert (Professeur en CPGE) et Benjamin Monmege (Enseignant-chercheur à l'université).

Ce sujet aborde divers aspects de la mission Cassini-Huygens à destination de Saturne, depuis le stockage et la compression des images jusqu'à l'idée de simulation de la trajectoire de la sonde lors de son passage aux environs de Vénus pour profiter de l'effet de fronde gravitationnelle.

Les premières questions (1 à 7) portent sur le stockage des données (nombre de bits, etc.) et la détermination d'un stockage optimal à l'aide de la notion d'entropie de Shannon. Il s'agit juste de faire quelques boucles pour écrire les fonctions demandées.

La suite (questions 8 à 11) demande déjà d'avoir une bonne compréhension du format des données et de ne pas s'y perdre, mais une fois cette représentation en tête, les calculs sont assez directs.

Vient alors la partie sur la compression de données (questions 12 à 16), où les questions ne sont pas difficiles à condition d'avoir su extraire les quelques informations utiles de la page de texte explicatif, qui n'est pas toujours très clair. C'est certainement l'endroit qui a bloqué le plus de candidats.

La fin du sujet (question 17 à 24), assez classique, demande d'implémenter la méthode d'Euler pour trouver la trajectoire de la sonde soumise à la double influence du Soleil et de Vénus. Ici, la difficulté est double : l'équation à intégrer est du deuxième ordre et les deux équations différentielles en x et en y sont couplées.

Le sujet ne traite pas du tout des bases de données ni du programme de deuxième année, mais sa longueur le rend adapté au concours. Le facteur limitant est la capacité à absorber des informations tandis que les questions elles-mêmes ne sont pas intrinsèquement difficiles. C'est particulièrement criant dans les questions 12 à 16 où les réponses sont aisées une fois que l'on a bien compris comment cela marche.

Indications

Partie II

1 Normalement, 1 ko = 1 000 o alors que 1 024 o = 1 Kio.

8 Par commodité, on pourra définir une liste d'indices à sélectionner sous la forme

```
selection = [1,11,21,31]
```

10 Les coefficients d'une matrice M produit d'une colonne C avec une ligne L sont tels que $\mathrm{M}_{ij} = \mathrm{C}_i \times \mathrm{L}_j$.

11 Les complexités d'actions successives s'ajoutent. Seul compte finalement le terme prédominant.

12 Faire la liste des différences de deux termes consécutifs de la liste `x`.

13 Cette question ne sert qu'à vérifier que vous utilisez correctement les branchements conditionnels.

14 Convertir le quotient de la division euclidienne par 2^p en code unaire et le reste en code binaire.

15 L'énoncé attend que `code1` contienne des chaînes de caractères.

Partie III

18 Définir une fonction auxiliaire `position_venus(t)` peut être une bonne idée.

II. Acquisition d'images par l'imageur VIMS et compression de données

1 Il s'agit simplement de compter le nombre de pixels sur une image, multiplié par le nombre total d'images, et de multiplier par la taille occupée en mémoire par l'information contenue dans un pixel (soit 12 bits). Comme un octet correspond à 8 bits, on a une taille totale de

$$\boxed{\overbrace{64 \times 64 \times 352}^{\text{nb total de pixels}} \times 12 = 17\,301\,504 \text{ bits} = 2\,162\,688 \text{ octets} = 2{,}16 \text{ Mo}}$$

> Si on considère que 1 ko = 1 024 octets (alors qu'en fait c'est un kibioctet noté Kio, voir la page Wikipédia sur l'octet), on trouverait 2,06 Mo, ce qui n'est pas très éloigné.
>
> La taille n'est pas très importante comparée à celle, usuelle, occupée par les photos numériques de nos jours malgré le grand nombre de longueurs d'ondes explorées. La différence vient en fait du nombre de pixels présent dans chaque image : $64 \times 64 = 4\,096$, ce qui semble ridicule en comparaison des photos actuelles qui se mesurent en méga-pixels. Néanmoins, pour des images astronomiques dont les objets étudiés occupent en général un champ très réduit, c'est largement suffisant, l'étude multi-spectrale étant bien plus intéressante que le nombre effectif de pixels sur chaque image.

2 Comme on vise une taille de 1 Mo après compression, le taux de compression est d'environ 50 % ou plus exactement

$$\boxed{\tau = \frac{2{,}16 - 1}{2{,}16} = 53{,}8\,\%}$$

3 Prenons en compte le fait que plusieurs caractères apparaissent avec la même probabilité (2 avec une probabilité de 0,3 et 4 avec une probabilité de 0,1). Alors

$$\boxed{\mathrm{H} = -2 \times 0{,}3 \log_2(0{,}3) - 4 \times 0{,}1 \log_2(0{,}1) = 2{,}37}$$

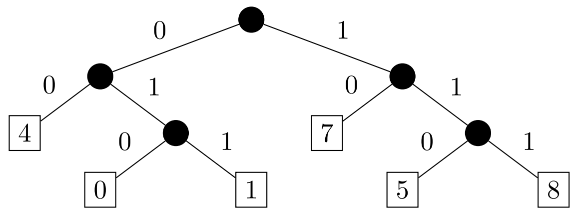
Connaissant le nombre de bits pour un caractère (4 ici), le taux de compression vaut donc sur cet exemple

$$\boxed{\tau = \frac{4 - \mathrm{H}}{4} = 40{,}7\,\%}$$

Le codage présenté (à 2,4 bits/caractère) se rapproche bien de l'estimation entropique.

> L'énoncé ne précise pas la provenance du codage utilisé dans le tableau 1. De manière évidente, il ne s'agit pas du codage utilisé dans la partie II.5.2, ce qui n'est pas très honnête. À première vue, il s'agit vraisemblablement d'un codage de Huffman. Comme l'indique l'énoncé, il s'agit d'associer à chaque entier un codage par une suite de bits. La contrainte principale est d'éviter l'ambiguïté. Supposons par exemple que l'on utilise le code suivant :
>
> $$4 \longleftrightarrow 00 \qquad 5 \longleftrightarrow 1 \qquad 6 \longleftrightarrow 001$$
>
> La séquence 001 peut alors aussi bien coder la chaîne 45 que la chaîne 6. Pour cela, une propriété essentielle du codage est qu'aucun symbole ne doit pouvoir être codé par une chaîne qui est **préfixe** d'une autre. On parle alors

de codage préfixe. On associe généralement un arbre à un tel code. Voici celui de l'exemple de l'énoncé :



Le code d'un symbole est la suite des bits rencontrés lors du parcours de la racine de l'arbre jusqu'au symbole en question. Cela assure la propriété préfixe. L'arbre est construit suivant un procédé algorithmique qui permet d'avoir les symboles les plus fréquents les plus proches de la racine, et donc avec les codes les plus courts. On peut alors s'en servir pour décoder directement un texte en se déplaçant dans l'arbre en fonction des bits lus. À chaque fois que l'on arrive à un symbole, on imprime le symbole trouvé puis on repart de la racine. En particulier,

$$0010100111010110111 \qquad \longleftrightarrow \qquad 47717758$$

4, 5 et 6 Le code complet demandé peut être implémenté de la façon suivante.

```
def entropie(S):
    # Question 4: On veut récupérer la liste des valeurs distinctes dans S
    valeurs = list(set(S))

    # Question 5: Calcul des différentes probabilités. Il faut d'abord compter.
    # On initialise donc la liste des probas (liée à la liste 'valeurs') avant
    # d'incrémenter chaque compteur en fonction de la valeur trouvée.
    proba = [0]*len(valeurs)
    for data in S:
        for i in range(len(valeurs)):
            if data == valeurs[i]:
                proba[i] += 1
    # On divise par le nombre de données pour avoir la proba de chaque valeur.
    proba = [c/len(S) for c in proba]

    # Question 6: reste à appliquer la formule pour trouver l'entropie
    H = 0
    for p in proba:
        H = H - p * log2(p)
    return H
```

L'application de ce code à la liste proposée donne bien le résultat calculé auparavant.

```
>>> entropie([4,5,7,0,7,8,4,1,7,4])
2.37095059445
```

Lorsqu'on trouve un « gagnant » dans le code précédent, on pourrait utiliser l'instruction `break` pour sortir de la boucle puisque, par unicité des valeurs de la liste `valeurs`, aucune autre ne pourra convenir. Néanmoins, il s'agit ici d'optimisation prématurée. En effet, on ne sait pas encore à ce stade si on risque de passer beaucoup de temps dans ces boucles et en pratique,

Centrale Maths 1 PSI 2016 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Nicolas Weiss (Professeur agrégé) ; il a été relu par Pierre-Elliott Bécue (ENS Cachan) et Sophie Rainero (Professeur en CPGE).

Le sujet adopte plusieurs points de vue (algèbre, topologie, probabilités) pour étudier des propriétés des matrices à coefficients dans $\{0,1\}$.

- La première partie s'intéresse à l'ensemble noté $\mathcal{Y}_n$ des matrices à coefficients dans $[\,0\,;1\,]$ et montre en particulier que les matrices inversibles à coefficients dans $\{0,1\}$ engendrent l'espace vectoriel $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
- Dans la deuxième partie, on étudie d'abord un aspect métrique des matrices à coefficients dans $[\,0\,;1\,]$: on peut donner un sens à la distance à $\mathcal{Y}_n$ d'une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Ensuite, on prouve que le déterminant atteint un maximum sur $\mathcal{Y}_n$, et que ce maximum est atteint pour une matrice à coefficients dans $\{0,1\}$.
- La troisième partie traite du cas particulier des matrices de permutation : ce sont les matrices carrées dont chaque ligne et chaque colonne ne comporte qu'un seul coefficient valant 1, les autres étant nuls ; elles constituent « une représentation du groupe symétrique ».
- Enfin, la quatrième partie envisage le cas de matrices aléatoires à coefficients dans $\{0,1\}$ engendrées par des vecteurs aléatoires ou par remplissage aléatoire, et utilise Python.

Une des originalités de ce sujet est qu'il permettait aux candidats de montrer leur capacité à produire des algorithmes (écrits en Python). Chaque thème est par ailleurs abordé de façon assez classique, même si certaines questions demandent de trouver le bon angle d'attaque. La dernière partie nécessite une compréhension en profondeur de la loi binomiale.

Indications

Partie I

I.A.3 La compacité est hors programme : remplacer le mot « compact » par « fermé et borné ».

I.A.4 Majorer un coefficient bien choisi de $\mathrm{M}v$ avec v vecteur propre.

I.B.1 Étudier directement le spectre de chaque matrice de $\mathcal{X}_2'$.

I.B.2 Procéder par identification pour écrire une matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ comme combinaison linéaire des éléments de $\mathcal{X}_2'$. Généraliser en utilisant l'inclusion de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{R})$

$$\mathrm{M} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathrm{M} \end{pmatrix}$$

Partie II

II.A.2 Utiliser le fait que $\mathcal{Y}_n$ est fermé et borné dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

II.A.3 L'explicitation de M revient à étudier le minimum de la fonction carré sur des segments bien choisis.

II.B.1 Exploiter le résultat des questions I.A.1 et I.A.3.

II.B.2 Réutiliser l'inclusion de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{R})$ (voir indication I.B.2).

II.B.3 Si on pose $\alpha_n = \det(\mathrm{M})$, alors on peut établir la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \alpha_{n+1} = -(2\alpha_n + \alpha_{n-1})$$

II.B.4 Isoler le terme où intervient le coefficient $n_{i,j}$ dans le développement de $\det(\mathrm{N})$ suivant la ligne i ou la colonne j.

Partie III

III.B.1 Aucune application d'un ensemble infini dans un ensemble fini ne peut être injective.

III.B.2 Le polynôme $\mathrm{X}^{\mathrm{N}} - 1$ annule P_σ pour un certain $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$.

III.B.3 L'étude des vecteurs propres de $\mathrm{P}_{(12)}$ et $\mathrm{P}_{(123)}$ suffit à conclure ((12) désigne la permutation de $\{1,2,3\}$ qui transforme 123 en 213 et (123) celle qui transforme 123 en 231).

III.B.4.b Expliciter ce qu'implique la non appartenance à D sur les coordonnées d'un vecteur.

III.C Voir indication donnée pour la question III.B.1.

Partie IV

IV.A.3 Séparer les cas $i = j$ et $i \neq j$.

IV.A.4.a Calculer directement les coefficients de $\mathrm{M}(\omega)$.

IV.A.4.b Utiliser le théorème spectral car $\mathrm{M}(\omega)$ est symétrique réelle.

IV.A.4.c Calculer $\mathrm{M}(\omega)^2$.

IV.A.5 Utiliser la question IV.A.4.b.

IV.B.2 Choisir deux valeurs i et j de $\mathrm{N}_1(\Omega)$ et $\mathrm{N}_2(\Omega)$ incompatibles mais possibles.

IV.B.6.b Calculer l'espérance de N après avoir prouvé que

$$\mathrm{P}(\mathrm{N} \leqslant k) = \prod_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \mathrm{P}(\mathrm{T}_{i,j} \leqslant k)$$

I. Généralités

I.A.1 Chaque matrice de $\mathcal{X}_n$ possède n^2 coefficients, qui peuvent être égaux à 0 ou 1 indépendamment les uns des autres. Ainsi,

$$\boxed{\text{L'ensemble } \mathcal{X}_n \text{ est fini de cardinal } 2^{(n^2)}.}$$

I.A.2 Montrons par récurrence que la propriété $\mathscr{P}(n)$: « $\det(\mathrm{M}) < n!$ pour tout $\mathrm{M} \in \mathcal{Y}_n$ » est vraie pour tout $n \geqslant 2$.

- $\underline{\mathscr{P}(2)}$: soit $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{Y}_2$.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \leqslant ad \leqslant 1 < 2!$$

car les coefficients a, b, c et d sont compris entre 0 et 1. Donc $\mathscr{P}(2)$ est vraie.

- $\underline{\mathscr{P}(n) \Longrightarrow \mathscr{P}(n+1)}$: supposons la propriété $\mathscr{P}$ vraie au rang n et considérons un élément $\mathrm{M} \in \mathcal{Y}_{n+1}$. Majorons le développement de $\det(\mathrm{M})$ suivant sa première colonne.

$$\det(\mathrm{M}) = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1} \mathrm{M}_{i,1} \widehat{\mathrm{M}}_{i,1} \leqslant \sum_{i=1}^{n+1} |\mathrm{M}_{i,1}| \left|\widehat{\mathrm{M}}_{i,1}\right|$$

où $\widehat{\mathrm{M}}_{i,1}$ désigne le mineur correspondant à $\mathrm{M}_{i,1}$. Mais $0 \leqslant \mathrm{M}_{i,1} \leqslant 1$ et $\widehat{\mathrm{M}}_{i,1}$ est le déterminant d'une matrice de $\mathcal{Y}_n$. Aussi par hypothèse de récurrence, on obtient

$$\det(\mathrm{M}) < (n+1) \times 1 \times n! < (n+1)!$$

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

- $\underline{\text{Conclusion}}$: $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant 2$.

$$\boxed{\text{Pour tout } \mathrm{M} \in \mathcal{Y}_n,\ \det(\mathrm{M}) < n!}$$

L'hypothèse $n \geqslant 2$ faite par le sujet est nécessaire car $\mathcal{Y}_1 = \{(x) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1\}$ et $\mathcal{X}_1 = \{(0), (1)\}$. Or $|1| = 1!$

I.A.3 La compacité est hors programme en PSI. Dans le cas d'un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$, la compacité d'un sous-espace est le fait d'être à la fois partie fermée et bornée de l'espace ambiant.

Soit $(\mathrm{M}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{Y}_n$ qui converge vers $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Pour tout couple $(i,j) \in [\![1\,; n]\!]^2$ et tout entier k, on a

$$0 \leqslant (\mathrm{M}_k)_{i,j} \leqslant 1$$

d'où en faisant tendre k vers $+\infty$

$$0 \leqslant \mathrm{M}_{i,j} \leqslant 1$$

c'est-à-dire $\mathrm{M} \in \mathcal{Y}_n$. On vient de montrer que toute suite convergente d'éléments de $\mathcal{Y}_n$ converge dans $\mathcal{Y}_n$, soit

$$\boxed{\text{L'ensemble } \mathcal{Y}_n \text{ est fermé dans } \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).}$$

Tous les coefficients des matrices de $\mathcal{Y}_n$ étant compris entre 0 et 1, toute norme sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est majorée sur $\mathcal{Y}_n$. Ainsi

$$\boxed{\text{L'ensemble } \mathcal{Y}_n \text{ est borné dans } \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).}$$

Soient M et N des éléments de $\mathcal{Y}_n$ et $t \in [\,0\,;1\,]$. Pour tout $(i,j) \in [\![\,1\,;n\,]\!]^2$, on a

$$(t\mathrm{M} + (1-t)\mathrm{N})_{i,j} = t\,\mathrm{M}_{i,j} + (1-t)\,\mathrm{N}_{i,j}$$

Puisque $\mathrm{M}_{i,j}$, $\mathrm{N}_{i,j}$, t et $1-t$ appartiennent à $[\,0\,;1\,]$, il vient directement l'encadrement

$$0 \leqslant t\,\mathrm{M}_{i,j} + (1-t)\,\mathrm{N}_{i,j} \leqslant t + (1-t) = 1$$

Ceci étant vrai pour tout (i,j), la matrice $t\,\mathrm{M} + (1-t)\,\mathrm{N}$ appartient bien à $\mathcal{Y}_n$, et

$$\boxed{\text{L'ensemble } \mathcal{Y}_n \text{ est convexe dans } \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).}$$

$\boxed{\textbf{I.A.4}}$ Soient $v = {}^t(v_1, \cdots, v_n)$ un vecteur propre de $\mathrm{M} \in \mathcal{Y}_n$ associé à la valeur propre λ, et $i_0 \in [\![\,1\,;n\,]\!]$ un entier tel que $|v_{i_0}| = \max\{|v_1|\,, \cdots, |v_n|\}$. On a

$$(\mathrm{M}v)_{i_0} = \lambda v_{i_0} = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{M}_{i_0,j} v_j$$

Il n'y a plus qu'à majorer en valeur absolue cette dernière somme.

$$\begin{aligned}
|\lambda|\,|v_{i_0}| &\leqslant \left|\sum_{j=1}^{n} \mathrm{M}_{i_0,j} v_j\right| \\
&\leqslant \sum_{j=1}^{n} |\mathrm{M}_{i_0,j} v_j| \\
&\leqslant \sum_{j=1}^{n} |v_j| && \text{car } \mathrm{M} \in \mathcal{Y}_n \\
&\leqslant \sum_{j=1}^{n} |v_{i_0}| && \text{par définition de } i_0 \\
|\lambda|\,|v_{i_0}| &\leqslant n\,|v_{i_0}|
\end{aligned}$$

Comme tout vecteur propre est non nul, on a nécessairement $|v_{i_0}| > 0$, ce qui permet de conclure.

$$\boxed{\text{Toute valeur propre complexe } \lambda \text{ de } \mathrm{M} \in \mathcal{Y}_n \text{ vérifie } |\lambda| \leqslant n.}$$

L'entier n est valeur propre d'une matrice de $\mathcal{Y}_n$, comme on peut le constater à l'aide de l'égalité qui suit.

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ \vdots \\ n \end{pmatrix} = n \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{L'entier } n \text{ est valeur propre de } \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.}$$

$\boxed{\textbf{I.B.1}}$ Le déterminant de toute matrice M de $\mathcal{X}_2$ est à valeur dans $\{-1, 0, 1\}$. Il ne peut être nul que si les produits des deux diagonales de M sont égaux car

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Centrale Maths 2 PSI 2016 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Céline Chevalier (Enseignant-chercheur à l'université) ; il a été relu par Juliette Brun-Leloup (Professeur en CPGE) et Benjamin Monmege (Enseignant-chercheur à l'université).

Le sujet est consacré aux transformations de Fourier et de Laplace d'une fonction intégrable. Il évoque également rapidement leur application à la théorie de l'échantillonnage de Shannon. Ses six parties font appel à la majorité du cours d'analyse de deuxième année ainsi qu'à certains chapitres du cours de probabilités.

- La première partie définit la transformation de Fourier et prouve les principales propriétés utiles pour la suite. Elle se conclut par un exemple, qui permet de manipuler concrètement les objets définis et sera réutilisé dans la partie II.
- La deuxième partie est écrite dans le prolongement de la première et aboutit à la formule d'inversion de Fourier, qui permet de retrouver une fonction à partir de sa transformée de Fourier. Elle se conclut également par un exemple concret.
- La troisième partie considère le cas particulier de la transformée de Fourier à support compact. C'est une partie un peu technique, qui demande en particulier de savoir gérer correctement les majorations.
- Dans la quatrième partie, ce sont les fonctions périodiques qui sont étudiées. C'est une partie difficile et assez calculatoire. Elle demande également de réutiliser les questions précédentes et d'appliquer à bon escient tous les outils classiques d'analyse.
- La cinquième partie donne une application des résultats précédents en évoquant la formule d'échantillonnage de Shannon, qui permet de retrouver un signal à partir d'un échantillon de ce dernier.
- Enfin, la sixième partie, un peu à part, introduit la transformation de Laplace. C'est un peu l'analogue de la première partie. Elle a sans doute été placée ici afin de proposer un peu de probabilités (basées sur des lois de Poisson).

Ce problème est long mais il reste classique et sans grande difficulté (hormis peut-être la partie IV). Il constitue de ce fait un excellent problème de révision d'analyse en vue des écrits. En outre, le rapport de l'épreuve signale qu'il était possible d'obtenir une note « tout à fait honorable » en étant « précis dans la rédaction et l'utilisation des théorèmes d'analyse de seconde année », « sans avoir eu besoin d'aborder chacune des six parties ». Pour les questions nécessitant « l'utilisation de théorèmes spécifiques aux intégrales à paramètre », le jury rappelle que les correcteurs sont « particulièrement attentifs à la présence de l'hypothèse de domination adaptée au contexte particulier » et apprécient « une présentation numérotée des différents points à vérifier ». Enfin, pour les théorèmes utilisés dans leur version « intégrales généralisées », le jury « apprécie de voir rappelées certaines hypothèses spécifiques même si les constatations sont parfois totalement évidentes ».

Indications

Partie I

I.B.1 Utiliser le fait que la fonction sinus est développable en série entière.

I.B.2 Utiliser la 1-périodicité de $x \mapsto |\sin(\pi x)|$.

I.C Appliquer le théorème de continuité des intégrales à paramètre.

I.D.2 Appliquer le théorème de dérivabilité des intégrales à paramètre.

Partie II

II.A Vérifier les hypothèses du théorème de convergence dominée.

II.B Raisonner comme à la question II.A .

II.D Combiner les questions II.A, II.B et II.C pour la première égalité. Appliquer ensuite le résultat du début de la question à la fonction h donnée dans l'énoncé.

Partie III

III.A Grâce à l'égalité (**II.1**), se ramener à la question I.D.2 .

III.B Pour $(x_0, x) \in \mathbb{R}^2$, $x_0 \leqslant x$, appliquer la formule de Taylor avec reste intégral à la fonction f entre x_0 et x. Calculer ensuite les dérivées successives de f en exploitant une méthode similaire à la question I.D.2 . Montrer enfin que le reste intégral converge vers 0. Le cas $x \leqslant x_0$ se traite de manière identique.

III.C Appliquer la formule de la question précédente à un réel x tel que $f(x) = 0$. En déduire alors que l'intégrale est nulle, puis que la fonction f est nulle.

Partie IV

IV.A.2 Pour obtenir un équivalent, utiliser des développements limités des termes apparaissant au numérateur.

IV.C Séparer les termes positifs et négatifs de la somme et reconnaître la somme des termes d'une série géométrique. Utiliser ensuite la formule

$$\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} - 1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\, 2\mathrm{i} \sin(x)$$

valable pour tout $x \in \mathbb{R}$.

IV.D Exploiter les questions IV.B et IV.C .

IV.E Effectuer une intégration par parties, en posant

$$u(x) = g(x) \qquad \text{et} \qquad v'(x) = \sin((2n+1)\pi x)$$

L'inégalité triangulaire permet ensuite d'obtenir la constante C.

IV.F Utiliser l'égalité des accroissements finis, d'abord appliquée à f, puis à f', en faisant apparaître artificiellement le terme requis. Majorer ensuite les termes obtenus.

IV.G En vue d'appliquer les questions IV.D et IV.E à la fonction h_t donnée dans l'énoncé, définir la fonction g correspondante. Faire attention au fait que la constante C de la question IV.E dépend de g, donc ici de t. Conclure grâce à la question IV.F . Enfin, exprimer les coefficients $c_k(h_t)$ en fonction des coefficients $c_k(f)$ pour tout entier k.

Partie V

V.C Appliquer les résultats de la partie IV à la fonction h en posant $d_k = c_k(h)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

V.D Utiliser l'égalité (**II.1**) puis, pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, majorer la quantité

$$\left| f(x) - \sum_{k=-n}^{n} d_k \psi_k(x) \right|$$

en se servant du résultat de la question V.C .

Partie VI

VI.A.1 Utiliser la caractérisation par les fonctions génératrices.

VI.A.2 C'est une conséquence de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev appliquée à la variable aléatoire S_n.

VI.A.4 Appliquer le résultat des questions VI.A.3 puis VI.A.2 à $\varepsilon = |\lambda - x|$.

VI.B Réécrire la conclusion de la question VI.A.4 en utilisant la question VI.A.1 .

VI.C.1 Expliciter la somme demandée et reconnaître la somme de la question VI.B . Justifier alors qu'on peut intervertir la limite et l'intégrale à l'aide du théorème de convergence dominée.

I. Transformation de Fourier

I.A La fonction φ est continue sur $\mathbb{R} \smallsetminus \{-1/2, 1/2\}$ et elle admet une limite finie à gauche et à droite en $-1/2$ et $1/2$. Par suite, elle est bien continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. En outre, elle est nulle en dehors du segment $[-1/2\,;1/2]$, sur lequel elle est continue. Elle est donc intégrable sur $\mathbb{R}$. Finalement,

$$\boxed{\text{La fonction } \varphi \text{ appartient à l'ensemble } \mathrm{E}_{\mathrm{cpm}}.}$$

Soit $\xi \in \mathbb{R}$. On a
$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\varphi)(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}t\xi}\,\mathrm{d}t\\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}t\xi}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Supposons $\xi \in \mathbb{R}^*$. Alors
$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\varphi)(\xi) &= \left[\frac{\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}t\xi}}{-2\pi\mathrm{i}\xi}\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\\ &= \frac{\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}\xi} - \mathrm{e}^{-\pi\mathrm{i}\xi}}{2\pi\mathrm{i}\xi}\end{aligned}$$

En outre,
$$\mathcal{F}(\varphi)(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} 1\,\mathrm{d}t = 1$$

donc
$$\boxed{\forall \xi \in \mathbb{R} \qquad \mathcal{F}(\varphi)(\xi) = \begin{cases} \dfrac{\sin(\pi\xi)}{\pi\xi} & \text{si } \xi \neq 0\\ 1 & \text{sinon}\end{cases}}$$

I.B.1 La fonction sinus est développable en série entière, de rayon de convergence infini, et son développement vaut
$$\forall y \in \mathbb{R} \qquad \sin(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} y^{2n+1}$$

Soit $x \in \mathbb{R}^*$. En posant $y = \pi x$ et en divisant l'égalité précédente par y, il vient
$$\psi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (\pi x)^{2n}$$

Comme cette égalité reste vraie pour $x = 0$, on en déduit que

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{La fonction } \psi \text{ est développable en série entière,}\\ \text{de rayon de convergence infini et}\\ \qquad \forall x \in \mathbb{R} \qquad \psi(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (\pi x)^{2n}\end{array}}$$

Comme la somme d'une série entière est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur son disque ouvert de convergence, il vient

$$\boxed{\text{La fonction } \psi \text{ est de classe } \mathscr{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

> Le rapport du jury signale que cette question « portant sur le caractère développable en série entière d'une fonction est très mal traitée ». Pour toutes ces questions sous la forme « montrer qu'il existe », le jury recommande d'« utiliser un brouillon pour faire l'analyse du problème avant d'expliciter clairement l'objet vérifiant la propriété requise ».

Centrale Informatique PSI 2016 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Cyril Ravat (Professeur en CPGE) ; il a été relu par Jean-Julien Fleck (Professeur en CPGE) et Benjamin Monmege (Enseignant-chercheur à l'université).

Ce sujet d'informatique s'intéresse aux méthodes de prévention des collisions aériennes. Il est découpé en trois parties indépendantes de longueurs très différentes.

- La première partie traite des plans de vol et de la gestion d'une base de données contenant les indications de chaque vol. Toutes les questions portent sur les bases de données ; leur difficulté est progressive. Cette partie donne un bon aperçu des connaissances attendues dans ce domaine.
- La deuxième partie aborde le choix des niveaux de vol. Elle introduit pour cela un graphe pondéré non orienté. Cette notion n'est pas explicitement au programme, car elle ne figure que dans les activités facultatives de deuxième année ; néanmoins, tout le vocabulaire associé (arête, sommet, valuation) est rappelé par l'énoncé et la traduction du graphe sous forme de matrice d'adjacence est entièrement donnée. Remarquons cependant que les candidats en MP option informatique avaient un net avantage sur les autres, puisque cette notion est au programme de l'option.

  L'objet de cette partie est l'écriture de fonctions élémentaires codant un algorithme de minimisation d'un coût global. Les questions de programmation demandent du soin, notamment quand elles utilisent des listes de listes, mais ne posent pas de difficulté conceptuelle majeure. Pour chaque fonction, l'énoncé demande de calculer sa complexité. La partie s'achève avec l'algorithme du recuit simulé (un classique de l'optimisation), qui est entièrement décrit et qu'il faut convertir en fonctions dans le langage Python.
- La troisième partie décrit les grandes lignes du système de prévention automatique de collisions TCAS. Cette partie est dans l'ensemble beaucoup moins claire que la précédente. Le système est composé d'un certain nombre de boîtes noires dont on ne comprend pas toujours l'intérêt. Les questions de la première sous-partie, reliées à la représentation des nombres, sont plutôt simples. La deuxième sous-partie consiste à calculer le temps avant collision et commence par deux questions de mécanique élémentaire. La troisième sous-partie contient à nouveau de la programmation Python. La dernière sous-partie, beaucoup moins intéressante que le reste de l'épreuve, est faite de questions qualitatives, simplistes ou mal posées, sur le temps d'exécution de l'algorithme global. On ne sait pas trop ce qui est évalué dans ces questions.

Ce problème présente des questions d'intérêt inégal. De nombreuses questions de programmation sont cependant intéressantes, notamment dans la deuxième partie. Notons qu'il ne fait appel qu'au programme de première année et que les techniques d'ingénierie numérique ne sont pas abordées.

Indications

Partie I

I.A La fonction comptant un nombre d'enregistrements est `COUNT(*)`.

I.B La sélection exploite des informations présentes dans deux tables : il faut réaliser une jointure.

I.D Il faut joindre deux fois la table `vol` : il est nécessaire de la renommer pour distinguer chaque occurrence (on peut s'inspirer de la question précédente).

Partie II

II.A.1 Il s'agit d'une double itération, donc de deux boucles imbriquées. Attention à ne pas tout compter en double...

II.B.2 La structure de l'algorithme est proche de celle de la question II.A.1, mais avec des compteurs variant sur le nombre de vols. Penser à utiliser les indications de l'énoncé sur les liens entre s, r_k et k.

II.C.1 Rechercher les sommets non supprimés et ajouter le coût correspondant. Que leur état soit égal à 1 ou à 2 n'intervient pas.

II.C.2 Il s'agit d'une recherche de minimum, algorithme simple à connaître. Penser à ne parcourir que les sommets ni supprimés ni déjà choisis.

II.C.3 Il faut se demander si l'on sait combien d'itérations l'algorithme doit effectuer. La boucle doit être précédée de l'initialisation des variables (liste des états et des régulations) ; son contenu est très bien décrit dans l'énoncé.

II.D La modification aléatoire de r_k peut être longue à écrire : penser à une permutation circulaire d'une ou deux cases sur un total de trois peut permettre d'obtenir un code plus simple.

Partie III

III.B.1 Le référentiel d'étude $\mathcal{R}_0$ est défini à la question III.A.3. Il est lié à l'avion propre, qui y est donc immobile.

III.B.2 t_c est l'instant où la norme de $\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ est minimale.

III.C.1 L'ensemble de l'algorithme est donné dans l'énoncé. Il faut commencer par chercher l'avion intrus dans la liste et effectuer les traitements prévus lorsqu'on le trouve. Si chaque possibilité de traitement se conclue par un `return`, la sortie de la boucle de recherche correspond à un avion absent de la liste.

III.C.2 Supprimer l'avion à traiter de la liste avant de la parcourir permet de simplifier et de systématiser le traitement.

III.C.3 Cette question ne présente aucune difficulté, si ce n'est de relire l'introduction de cette partie (pages 4 et 5) et d'avoir bien compris ce que réalisent les différentes fonctions écrites aux questions précédentes.

I. Plan de vol

I.A L'énoncé spécifie que l'on peut comparer une date et une heure avec une chaîne de caractères équivalente. De plus, l'opérateur d'agrégation permettant de compter le nombre d'enregistrements est `COUNT(*)`. On peut ainsi écrire :

```
SELECT COUNT(*) FROM vol WHERE jour='2016-05-02' AND heure<'12:00'
```

I.B Les informations à utiliser sont contenues dans deux tables : on doit afficher des identifiants de vol `id_vol` contenus dans la table `vol` et faire la sélection en particulier sur `ville`, dans la table `aeroport`. Il faut donc réaliser une jointure, c'est-à-dire l'assemblage des lignes correspondantes dans les deux tables. La condition de jointure est par conséquent `depart=id_aero`. On obtient :

```
SELECT id_vol FROM vol JOIN aeroport ON depart=id_aero
WHERE ville='Paris' AND jour='2016-05-02'
```

> Dès que l'on utilise deux tables dans la même requête, il y a un risque de nom identique pour deux colonnes. Ce n'est pas le cas ici, mais si les colonnes `id_vol` et `id_aero` s'appelaient toutes les deux `id`, alors le système ne pourrait pas comprendre la requête si on ne précise pas de quel `id` il s'agit. Il faudrait alors écrire respectivement `vol.id` et `aeroport.id`. Il est par ailleurs possible d'écrire ici `vol.id_vol`, mais cela n'apporte rien.

I.C Cette requête réalise une double jointure entre la table `vol` et deux fois la table `aeroport`, afin d'associer à chaque vol la ville et le pays des deux aéroports concernés. Elle sélectionne ensuite les vols du 2 mai 2016 allant d'un aéroport français à un autre aéroport français.

Cette requête liste les vols nationaux français du 2 mai 2016.

I.D Il est nécessaire d'utiliser deux fois la table `vol`. Comme dans l'exemple donné à la question précédente, il faut renommer les tables. Les conditions de jointure et de sélection sont ici exceptionnellement proches, au point que plusieurs solutions sont possibles en déplaçant les conditions du `ON` vers le `WHERE` ou inversement. Par exemple, en considérant que l'on joint les tables pour les vols ayant lieu le même jour au même niveau, puis que l'on sélectionne les vols ayant les mêmes points de départ et d'arrivée, on a

```
SELECT v1.id_vol AS id1, v2.id_vol AS id2
FROM vol AS v1 JOIN vol AS v2
ON v1.jour=v2.jour AND v1.niveau=v2.niveau
WHERE v1.depart=v2.arrivee AND v1.arrivee=v2.depart
AND v1.id_vol<v2.id_vol
```

> On aurait donc pu aussi joindre les tables à la condition d'aéroports correspondants, et réaliser la sélection sur les égalités de jour et de niveau. On pourrait même positionner les 4 égalités dans la condition de jointure.
>
> La dernière inégalité dans la condition de sélection sert à n'afficher qu'une seule fois chaque couple : sans elle, chaque couple de vols serait affiché deux fois, avec `id1` et `id2` permutant leurs valeurs. Demander cette condition supprime l'une des deux lignes. Les `id_vol` étant des chaînes de caractères, elles

sont classiquement ordonnées suivant l'ordre lexicographique (ordre du dictionnaire, prenant en compte chiffres et lettres). On pourrait aussi imaginer utiliser l'ordre des heures de départ (`AND v1.heure<v2.heure`), mais avec le risque de supprimer les couples de vols partant à la même heure (ou de compter en double ces vols avec `<=`).

II. Allocation des niveaux de vol

II.A.1 L'énoncé demande de déterminer le nombre de conflits, c'est-à-dire le nombre de cases non nulles dans la variable `conflit` : il faut utiliser deux boucles imbriquées, une sur les lignes (éléments de `conflit`) et une sur les colonnes (éléments de chaque élément de `conflit`). La principale difficulté est en réalité de ne parcourir qu'une moitié du tableau, au-dessus ou au-dessous de la première diagonale. Il faut donc que les bornes du compteur de la deuxième boucle dépendent de la valeur du compteur de la première. On écrit ainsi

```
def nb_conflits():
    N = len(conflit)               # N vaut 3n
    resultat = 0                   # Résultat initialisé à zéro
    for i in range(N):             # Autre possibilité : range(1,N)
        for j in range(i+1,N):     # Autre possibilité : range(i)
            if conflit[i][j] > 0:
                resultat = resultat + 1
    return resultat
```

Une autre possibilité est de parcourir l'ensemble de la grille, `i` et `j` allant tous deux de 0 à $\mathrm{N}-1$. Bien sûr, le résultat sera le double de celui recherché, il faudra donc penser à le diviser par deux. Une telle réponse ne devrait normalement pas être pénalisée, car la complexité reste du même ordre que celle de la fonction écrite ci-dessus.

Si on préfère rester sur le parcours d'une moitié de tableau, autant faire attention à ne pas prendre en compte la diagonale : c'est pour cela que j commence à $i+1$ (ou s'arrête à $i-1$ dans la variante). La diagonale ne contient cependant que des zéros, les comptabiliser ne change pas le résultat.

II.A.2 Avant la première boucle, il y a deux opérations de complexité indépendante de la taille de `conflit`. À l'intérieur des deux boucles entièrement imbriquées, il n'y a aussi que des opérations de complexité constante. Le calcul de complexité revient donc à un calcul de nombre d'itérations de la deuxième boucle. Lorsque i vaut 0, elle est exécutée $\mathrm{N}-1$ fois. Lorsque i vaut 1, elle est exécutée $\mathrm{N}-2$ fois, et ainsi de suite : le nombre total d'opérations à effectuer peut s'écrire $k_1 + k_2\,((\mathrm{N}-1)+(\mathrm{N}-2)+\cdots+1+0) = k_1 + k_2\,(\mathrm{N}-1)(\mathrm{N}-2)/2$. Comme $\mathrm{N} = 3\,n$,

$$\boxed{\text{La complexité de la fonction } \texttt{nb\_conflits} \text{ est en } \mathrm{O}(n^2).}$$

On attend pour un calcul de complexité, et plus particulièrement pour le premier calcul de ce genre dans une épreuve, qu'il soit précisément justifié. En particulier, il ne faut pas se contenter de « Il y a deux boucles donc $\mathrm{O}(n^2)$. » Le calcul faisant apparaître la somme et sa transformation en produit doit être présent. On pourra en revanche aller plus vite sur les justifications suivantes.

Mines Maths 1 PSI 2016 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Matthias Moreno Ray (Professeur en CPGE) ; il a été relu par Thomas Ragel (ENS Lyon) et Sophie Rainero (Professeur en CPGE).

Le problème se compose de quatre parties. La première ne contient qu'une question préliminaire, qui sera utile dans la suite. Les deux suivantes sont indépendantes.

- La question préliminaire établit le développement en série entière d'une fonction. Il s'agit d'une question de cours.
- La partie B étudie le comportement d'une fonction développable en série entière au bord de son disque ouvert de convergence. Si la somme satisfait l'équivalent
$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k\, x^k \underset{x\to 1^-}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{1-x}}$$
on montre que la suite des sommes partielles de la série $\sum a_n$ diverge et on établit l'équivalent
$$\sum_{k=0}^{n} a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{n}$$
La démonstration repose sur une identité de Karamata qui est partiellement démontrée à l'aide de calculs de limites et d'intégrales généralisées. Cette partie ne comporte pas de difficulté particulière.
- La partie C établit le théorème suivant : si (a_n) est une suite décroissante de réels positifs, alors
$$\sum_{k=0}^{n} a_k \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{n} \qquad \Longrightarrow \qquad a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}$$
Il s'agit un cas particulier d'une famille plus vaste de résultats portant le nom de théorèmes taubériens. Cette partie ne fait appel qu'à des notions classiques et élémentaires : partie entière, limites, équivalents. Elle peut être traitée en première année.
- La partie D vise à démontrer quelques résultats sur les marches aléatoires dans $\mathbb{Z}$. Les premières questions font uniquement appel au formalisme des probabilités (manipulation de symboles, de l'indépendance et du conditionnement d'événements), mais les séries entières sont rapidement introduites pour mener à bien des calculs avancés. On utilise alors tous les résultats des parties précédentes pour obtenir des équivalents ou des valeurs exactes de certaines probabilités. On montre notamment que la marche aléatoire dans $\mathbb{Z}$ est récurrente (un point revient presque sûrement à sa position de départ en temps fini) et on calcule explicitement la loi de probabilité du temps de premier retour. Cette partie, plus délicate que les précédentes, est très enrichissante et permet d'explorer le théorème de Polya (1921) en dimension 1.

Ce problème est intéressant tout en restant d'un niveau raisonnable et d'une difficulté progressive. Il permettra de revoir de nombreux points essentiels des programmes d'analyse et de probabilités, ainsi que d'aborder un théorème fondamental du XX$^{\text{e}}$ siècle, qui a donné naissance à des branches très actives de la recherche actuelle.

Indications

Partie A

1 Écrire le développement en série entière de $x \longmapsto (1+x)^\alpha$ avec $\alpha = -1/2$.

Partie B

2 Exprimer $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k\, x^{(p+1)k}$ à l'aide de f.

3 Effectuer un changement de variable et utiliser l'indication de l'énoncé.

4 Le déduire de la question 3 en raisonnant à l'aide de combinaisons linéaires.

5 Étudier d'abord la fonction $t \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}} h(\mathrm{e}^{-t})$.

6 Montrer que la suite est nulle à partir d'un certain rang.

7 Utiliser l'égalité de Karamata et la question 5.

Partie C

8 Majorer $\mathrm{S}_{\lfloor \beta n \rfloor} - \mathrm{S}_n$ grâce au fait que (a_n) est décroissante.

10 Utiliser les questions 8 et 9.

Partie D

12 Utiliser le fait que les $(\mathrm{X}_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ sont des variables indépendantes et de même loi.

14 Conditionner par $\{\mathrm{S}_k = 0\}$ pour se ramener à la probabilité de la question 13.

15 Montrer que les ensembles A_k^n forment, pour $0 \leqslant k \leqslant n$, une partition de Ω.

16 Reconnaître un produit de Cauchy avec la question 15.

17 Observer que pour avoir $\mathrm{S}_n = 0$, il faut le même nombre de 1 et de -1.

18 Utiliser les questions 1, 16 et 17.

19 Appliquer les résultats des questions 7 et 11 à la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathrm{P}(\mathrm{E}_n) x^n$.

20 Écrire l'événement $\{\mathrm{T} = +\infty\}$ en fonction des événements E_n, $n \in \mathbb{N}$, puis passer à la limite.

21 Justifier que $\mathrm{P}(\mathrm{T} = n) = \mathrm{P}(\mathrm{E}_{n-1}) - \mathrm{P}(\mathrm{E}_n)$ et utiliser la question 18.

22 Calculer le développement en série entière de $1 - \sqrt{1 - x^2}$. Conclure à l'aide de la question 21.

A. Préliminaire

$\boxed{1}$ D'après le cours, la fonction $x \longmapsto (1+x)^{-1/2}$ est développable en série entière avec, pour tout $x \in \left]-1\,;1\right[$

$$(1+x)^{-1/2} = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} -\frac{1}{2}\Big(-\frac{1}{2}-1\Big)\cdots\Big(-\frac{1}{2}-k+1\Big)\,\frac{x^k}{k\,!}$$

ainsi
$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{2}+1\Big)\cdots\Big(\frac{1}{2}+k-1\Big)\,\frac{x^k}{k\,!}$$

d'où
$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{2}+1\Big)\cdots\Big(\frac{1}{2}+k-1\Big)\,\frac{x^k}{k\,!}$$

en remplaçant x par $-x \in \left]-1\,;1\right[$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on trouve

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{2}+1\Big)\cdots\Big(\frac{1}{2}+k-1\Big)\frac{1}{k\,!} &= \frac{1}{k\,!}\prod_{j=0}^{k-1}\Big(\frac{1}{2}+j\Big)\\ &= \frac{1}{2^k\,k\,!}\prod_{j=0}^{k-1}(1+2j)\\ &= \frac{(2k)\,!}{2^k\,k\,!\displaystyle\prod_{j=1}^{k}2j}\\ &= \frac{(2k)\,!}{4^k\,k\,!\displaystyle\prod_{j=1}^{k}j}\end{aligned}$$

soit
$$\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{2}+1\Big)\cdots\Big(\frac{1}{2}+k-1\Big)\frac{1}{k\,!} = \frac{1}{4^k}\binom{2k}{k}$$

Finalement
$$\boxed{\text{Pour tout } x \in \left]-1\,;1\right[,\quad \frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{k=0}^{+\infty}\binom{2k}{k}\frac{x^k}{4^k}.}$$

> Il est possible d'écrire une autre preuve de ce résultat. Après avoir étudié le rayon de convergence de la série entière, des calculs simples montrent que les fonctions définies sur $\left]-1\,;1\right[$ par $x \longmapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\binom{2k}{k}\frac{x^k}{4^k}$ et $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ sont solutions du problème de Cauchy linéaire
> $$(1-x)\,y' = \frac{1}{2}\,y$$
> avec la condition initiale $y(0) = 1$. Par unicité des solutions, ces deux fonctions sont donc égales.

B. Identité de Karamata

2 Soit $p \in \mathbb{N}$. Si $x \in \left]-1\,;1\right[$ alors $x^{p+1} \in \left]-1\,;1\right[$ donc par hypothèse, la série de terme général $a_k(x^{p+1})^k$ converge et sa somme est $f(x^{p+1})$. Ainsi, en posant $\mathrm{X} = x^{p+1}$

$$\sqrt{1-x}\sum_{k=0}^{+\infty} a_k\, x^{(p+1)k} = \sqrt{1-x} \times f(x^{p+1}) = \sqrt{\frac{1-\mathrm{X}^{1/(p+1)}}{1-\mathrm{X}}} \times \sqrt{1-\mathrm{X}} \times f(\mathrm{X})$$

D'une part
$$\frac{1-\mathrm{X}^{1/(p+1)}}{1-\mathrm{X}} \xrightarrow[\mathrm{X}\to 1^-]{} \frac{1}{p+1}$$

car la fonction $\mathrm{X} \longmapsto \mathrm{X}^{1/(p+1)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ de dérivée $\mathrm{X} \longmapsto \dfrac{1}{p+1}\mathrm{X}^{-p/(p+1)}$. D'autre part, la fonction $\mathrm{X} \longmapsto \sqrt{1-\mathrm{X}}\, f(\mathrm{X})$ admet $\sqrt{\pi}$ pour limite en 1^- par hypothèse. Comme $\mathrm{X} \to 1^-$ lorsque $x \to 1^-$, il s'ensuit que

$$\lim_{x\to 1^-} \sqrt{1-x}\sum_{k=0}^{+\infty} a_k\, x^{(p+1)k} = \lim_{\mathrm{X}\to 1^-} \sqrt{\frac{1-\mathrm{X}^{1/(p+1)}}{1-\mathrm{X}}} \times \sqrt{1-\mathrm{X}} \times f(\mathrm{X}) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{p+1}}$$

Conclusion
$$\boxed{\lim_{x\to 1^-} \sqrt{1-x}\sum_{k=0}^{+\infty} a_k\, x^{(p+1)k} \text{ existe et vaut } \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{p+1}}.}$$

3 Soit $p \in \mathbb{N}$. La fonction définie sur $\left]0\,;+\infty\right[$ par

$$g : t \longmapsto \frac{\mathrm{e}^{-(p+1)t}}{\sqrt{t}}$$

est continue et strictement positive. Puisque $g(t) \underset{0^+}{\sim} 1/\sqrt{t}$, elle est intégrable sur $\left]0\,;1\right]$. Par ailleurs, $g(t) \underset{t\to+\infty}{=} o(1/t^2)$ par croissances comparées. Par comparaison, g est donc intégrable sur $\left[1\,;+\infty\right[$. En conclusion,

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-(p+1)t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \text{ converge.}}$$

Effectuons le changement de variable linéaire $u = (p+1)t$. La fonction $t \longmapsto (p+1)t$ est une bijection strictement croissante de classe $\mathscr{C}^1$ de $\left]0\,;+\infty\right[$ dans $\left]0\,;+\infty\right[$, d'où

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-(p+1)t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t &= \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}} \times \frac{\sqrt{p+1}}{p+1}\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{\sqrt{p+1}}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u\end{aligned}$$

soit
$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-(p+1)t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{p+1}}}$$

en utilisant l'indication de l'énoncé. D'après la question 2, on a donc l'égalité

$$\boxed{\lim_{x\to 1^-} \sqrt{1-x}\sum_{k=0}^{+\infty} a_k\, x^{(p+1)k} = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-(p+1)t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t}$$

Mines Maths 2 PSI 2016 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Loïc Devilliers (ENS Cachan) ; il a été relu par Thierry Limoges (ENS Cachan) et Tristan Poullaouec (Professeur en CPGE).

Ce sujet traite des matrices quasi-nilpotentes dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Ce sont les matrices qui ne possèdent aucune valeur propre non nulle dans $\mathbb{K}$. L'objectif du problème est de démontrer que tout sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ constitué uniquement de matrices quasi-nilpotentes est de dimension majorée par $n(n-1)/2$. Ce sujet est composé de quatre parties, dont les trois premières sont indépendantes.

- La partie A s'intéresse aux exemples des matrices symétriques, antisymétriques et triangulaires. Certaines questions sont très proches du cours et ne posent aucune difficulté : structure de sous-espace vectoriel, calcul de dimension, etc.
- La partie B propose de démontrer le résultat principal dans le cas réel, en s'appuyant sur les matrices symétriques. Cette partie est courte et facile.
- La partie C démontre le lemme dit « des colonnes ». Cette partie est plus technique que les précédentes. Elle fait appel à l'écriture des matrices par blocs, aux matrices de permutation, aux changements de base et aux matrices élémentaires de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. La fin de cette partie est aussi l'occasion de pratiquer un peu de combinatoire et d'algorithmique sur les suites récurrentes d'ordre 1 prenant un nombre fini de valeurs.
- La partie D, enfin, démontre le résultat principal dans le cas général par récurrence sur n, en appliquant le lemme des colonnes.

Ce sujet couvre une vaste partie du programme d'algèbre linéaire des deux années. Il pouvait être traité dans le temps imparti à condition de répondre rapidement aux quelques questions faciles, afin de ménager une réserve de temps pour aborder les plus difficiles.

Indications

Partie A

1 Calculer le polynôme caractéristique de D.

3 Exhiber une base pour calculer la dimension de $\mathrm{S}_n(\mathbb{K})$.

4 De même, exhiber une base pour déterminer la dimension de $\mathrm{T}_n^{++}(\mathbb{K})$.

5 Calculer la transposée du produit. Appliquer la relation que l'on vient d'établir à un vecteur propre de A.

6 Dans le cas $n = 2$, montrer que $\mathrm{D} \in \mathrm{A}_2(\mathbb{R})$ mais que D n'est pas de la forme $\mathrm{P\,M\,P}^{-1}$ avec $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et $\mathrm{M} \in \mathrm{T}_n^{++}(\mathbb{K})$. Pour $n > 2$ compléter par blocs la matrice D de la façon la plus simple pour avoir une matrice antisymétrique vérifiant la propriété voulue.

Partie B

7 Utiliser la diagonalisabilité des matrices symétriques réelles. Penser à la matrice étudiée à la question 2.

8 Noter que V et $\mathrm{S}_n(\mathrm{R})$ sont en somme directe.

Partie C

10 Déterminer le polynôme caractéristique de la matrice M.

11 Appliquer l'hypothèse de récurrence à $\mathrm{K}(\mathrm{V}')$.

15 Utiliser la question 14.

16 Appeler σ la permutation qui échange j et n, puis appliquer les résultats des questions 11 et 15.

17 Une suite à valeurs dans un ensemble fini ne peut être injective.

18 Commencer par créer un tableau qui stocke les entiers déjà visités par la suite des images successives de 1. De cette manière, trouver un élément qui est atteint deux fois par la suite des images successives de 1.

19 Au moins au brouillon, simplifier le problème en supposant que $j_k = k$ pour tout $k \in [\![\, 1\,; p\,]\!]$.

Partie D

20 Considérer l'application $\mathrm{M} \longmapsto (\mathrm{K}(\mathrm{M}), \mathrm{L}(\mathrm{M}))$ et un supplémentaire de W dans V.

21 Appliquer l'hypothèse de récurrence à $\mathrm{K}(\mathrm{W})$.

22 Utiliser le lemme des colonnes et la question 15 pour se ramener à ce qui précède.

A. Exemples

1 Le polynôme caractéristique de D, matrice carrée d'ordre 2, est

$$\chi_{\mathrm{D}} = \mathrm{X}^2 - \mathrm{Tr}\,(\mathrm{D})\mathrm{X} + \det(\mathrm{D}) = \mathrm{X}^2 + 1$$

Ce polynôme n'admet pas de racine dans $\mathbb{R}$. Les valeurs propres étant exactement les racines du polynôme caractéristique, on en déduit que la matrice D ne possède aucune valeur propre dans $\mathbb{R}$. A fortiori elle ne possède pas de valeur propre non nulle dans $\mathbb{R}$, d'où

$$\boxed{\text{La matrice D est quasi-nilpotente dans } \mathscr{M}_2(\mathbb{R}).}$$

Néanmoins la matrice D possède deux valeurs propres complexes i et $-$i, qui sont non nulles. Ainsi,

$$\boxed{\text{La matrice D n'est pas quasi-nilpotente dans } \mathscr{M}_2(\mathbb{C}).}$$

2 De même, la matrice B a pour polynôme caractéristique

$$\chi_{\mathrm{B}} = \mathrm{X}^2 - \mathrm{Tr}\,(\mathrm{B})\mathrm{X} + \det(\mathrm{B}) = \mathrm{X}^2$$

Par conséquent, la seule valeur propre complexe de B est 0. Ainsi,

$$\boxed{\text{La matrice B est quasi-nilpotente dans } \mathscr{M}_2(\mathbb{C}).}$$

3 D'abord, la matrice nulle de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est symétrique. Ensuite, pour A, B $\in \mathrm{S}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$

$${}^t(\mathrm{A} + \lambda\,\mathrm{B}) = {}^t\mathrm{A} + \lambda\,{}^t\mathrm{B} = \mathrm{A} + \lambda\,\mathrm{B}$$

d'après la linéarité de la transposée. Ainsi $\mathrm{A} + \lambda\,\mathrm{B} \in \mathrm{S}_n(\mathbb{K})$. Ceci prouve que

$$\boxed{\text{L'ensemble } \mathrm{S}_n(\mathbb{K}) \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathrm{M}_n(\mathbb{K}).}$$

La matrice nulle de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est antisymétrique, de plus pour A, B $\in \mathrm{A}_n(\mathbb{K})$ et pour $\lambda \in \mathbb{K}$

$${}^t(\mathrm{A} + \lambda\,\mathrm{B}) = {}^t\mathrm{A} + \lambda\,{}^t\mathrm{B} = -\mathrm{A} - \lambda\,\mathrm{B}$$

Ainsi $\mathrm{A} + \lambda\,\mathrm{B} \in \mathrm{A}_n(\mathbb{K})$. Ceci montre que

$$\boxed{\text{L'ensemble } \mathrm{A}_n(\mathbb{K}) \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathrm{M}_n(\mathbb{K}).}$$

La matrice nulle de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est triangulaire supérieure stricte. Soient $\mathrm{A} = (a_{ij})$, $\mathrm{B} = (b_{ij}) \in \mathrm{T}_n^{++}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On pose $\mathrm{C} = \mathrm{A} + \lambda\,\mathrm{B} = (c_{ij})$ on a

$$\forall\,(i,j) \in [\![\,1\,;n\,]\!]^2 \qquad i \geqslant j \Longrightarrow c_{ij} = a_{ij} + \lambda\,b_{ij} = 0$$

Ceci montre que $\mathrm{C} = \mathrm{A} + \lambda\,\mathrm{B} \in \mathrm{T}_n^{++}(\mathbb{K})$. On en conclut que

$$\boxed{\text{L'ensemble } \mathrm{T}_n^{++}(\mathbb{K}) \text{ est sous-espace vectoriel de } \mathscr{M}_n(\mathbb{K}).}$$

> Une autre façon de procéder est d'utiliser le fait que les noyaux d'applications linéaires sont des sous-espaces vectoriels de l'espace de départ. Les ensembles $\mathrm{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathrm{A}_n(\mathbb{K})$ sont les noyaux des applications linéaires $\mathrm{M} \longmapsto \mathrm{M} - {}^t\mathrm{M}$ et $\mathrm{M} \longmapsto \mathrm{M} + {}^t\mathrm{M}$, donc ce sont des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Pour $\mathrm{T}_n^{++}(\mathbb{K})$, introduisons pour $k,\ \ell \in [\![\,1\,;n\,]\!]$ la forme linéaire

$\varphi_{k,\ell} : (m_{ij}) \longmapsto m_{k\ell}$ définie sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Ainsi, $\mathrm{T}_n^{++}(\mathbb{K})$ s'écrit sous la forme

$$\mathrm{T}_n^{++}(\mathbb{K}) = \bigcap_{1\leqslant \ell \leqslant k \leqslant n} \mathrm{Ker}\ \varphi_{k,\ell}$$

Les intersections de sous-espaces vectoriels étant encore des sous-espaces vectoriels, on en déduit que $\mathrm{T}_n^{++}(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Montrons que la famille de matrices symétriques

$$\mathscr{F} = (\mathrm{E}_{ii})_{1\leqslant i\leqslant n} \cup (\mathrm{E}_{ij} + \mathrm{E}_{ji})_{1\leqslant i<j\leqslant n}$$

est une base de $\mathrm{S}_n(\mathbb{K})$. Soit $\mathrm{S} = (s_{ij}) \in \mathrm{S}_n(\mathbb{K})$. Comme S est symétrique,

$$\begin{aligned}
\mathrm{S} &= \sum_{i=1}^{n} s_{ii}\,\mathrm{E}_{ii} + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} s_{ij}\,\mathrm{E}_{ij} + \sum_{1\leqslant j<i\leqslant n} s_{ij}\,\mathrm{E}_{ij} \\
&= \sum_{i=1}^{n} s_{ii}\,\mathrm{E}_{ii} + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} s_{ij}(\mathrm{E}_{ij} + \mathrm{E}_{ji})
\end{aligned}$$

Ainsi $\mathrm{S} \in \mathrm{Vect}\,(\mathscr{F})$ et $\mathscr{F}$ est une famille génératrice de $\mathrm{S}_n(\mathbb{K})$.

Soit $(a_{ii})_{1\leqslant i\leqslant n} \cup (a_{ij})_{1\leqslant i<j\leqslant n}$ une famille de scalaires telle que

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ii}\,\mathrm{E}_{ii} + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_{ij}(\mathrm{E}_{ij} + \mathrm{E}_{ji}) = 0$$

d'où
$$\sum_{i=1}^{n} a_{ii}\,\mathrm{E}_{ii} + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_{ij}\,\mathrm{E}_{ij} + \sum_{1\leqslant j<i\leqslant n} a_{ij}\mathrm{E}_{ji} = 0$$

La famille $(\mathrm{E}_{ij})_{1\leqslant i,\, j\leqslant n}$ est libre car c'est une base de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Ainsi les coefficients a_{ii} et a_{ij} sont tous nuls, ce qui montre la liberté de la famille $\mathscr{F}$. En conséquence, la famille $\mathscr{F}$ est une base de $\mathrm{S}_n(\mathbb{K})$ donc

$$\dim \mathrm{S}_n(\mathbb{K}) = \mathrm{Card}\ \mathscr{F} = n + \sum_{j=2}^{n} (j-1) = n(n+1)/2$$

En conclusion, $\boxed{\text{La dimension de } \mathrm{S}_n(\mathbb{K}) \text{ vaut } n(n+1)/2.}$

$\boxed{4}$ Soit $\mathrm{T} \in \mathrm{T}_n^{++}(\mathbb{K})$, la matrice $\mathrm{XI}_n - \mathrm{T}$ est triangulaire supérieure et sa diagonale est constituée uniquement de X. Comme le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit de ses termes diagonaux, on en déduit que le polynôme caractéristique de T est $\chi_{\mathrm{T}} = \mathrm{X}^n$. Ainsi la seule racine de χ_{T} dans $\mathbb{K}$ est 0. La seule valeur propre de T dans $\mathbb{K}$ étant 0, la matrice T est quasi-nilpotente. Tous les éléments de $\mathrm{T}_n^{++}(\mathbb{K})$ sont quasi-nilpotents, si bien que

$$\boxed{\text{Le sous-espace vectoriel } \mathrm{T}_n^{++}(\mathbb{K}) \text{ est quasi-nilpotent dans } \mathrm{M}_n(\mathbb{K}).}$$

Soit $\mathrm{T} = (t_{ij}) \in \mathrm{T}_n^{++}(\mathbb{K})$. Comme $t_{ij} = 0$ dès que $i \geqslant j$, on obtient

$$\mathrm{T} = \sum_{1\leqslant i,\, j\leqslant n} t_{ij}\mathrm{E}_{ij} = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} t_{ij}\mathrm{E}_{ij}$$

De ce fait, la famille de matrices triangulaires supérieures $\mathscr{F}' = (\mathrm{E}_{ij})_{1\leqslant i<j\leqslant n}$ est une famille génératrice de $\mathrm{T}_n^{++}(\mathbb{K})$. C'est de plus une sous-famille de la base canonique, donc elle est libre. Par conséquent, $\mathscr{F}'$ est une base de $\mathrm{T}_n^{++}(\mathbb{K})$. La dimension de $\mathrm{T}_n^{++}(\mathbb{K})$ est alors le cardinal de cette base, soit

$$\dim \mathrm{T}_n^{++}(\mathbb{K}) = \mathrm{Card}\ \mathscr{F}' = \sum_{j=2}^{n} (j-1) = n(n-1)/2$$

En conclusion, $\boxed{\text{La dimension de } \mathrm{T}_n^{++}(\mathbb{K}) \text{ est } n(n-1)/2.}$

Mines Informatique PSI 2016 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Virgile Andreani (ENS Ulm) ; il a été relu par Julien Dumont (Professeur en CPGE) et Jean-Julien Fleck (Professeur en CPGE).

Ce sujet d'informatique propose d'étudier la propagation des épidémies. Ses trois parties sont indépendantes.

- La première partie, très classique, est l'occasion d'étudier un algorithme de tri. Elle comporte quelques questions de difficulté croissante sur les bases de données relationnelles.
- Dans la deuxième partie, il faut compléter un code permettant d'intégrer un système d'équations différentielles modélisant la propagation d'une épidémie. Le système est ensuite modifié pour introduire un retard, puis on passe à un ensemble d'équations intégro-différentielles dont on doit calculer l'intégrale par la méthode des rectangles.
- La troisième partie, un peu plus originale, propose d'ajouter des dimensions spatiales au modèle, simulé cette fois-ci par un automate cellulaire non déterministe.

Peu de programmation est demandée. Hormis une ou deux questions, le sujet est d'une difficulté modérée ; il est accessible dès la première année de prépa. Les réponses attendues sont souvent plus courtes que les questions. C'est un bon sujet d'entraînement pour s'assurer que l'on sait appliquer le cours sur des exemples simples.

Indications

Partie I

2 Raisonner par récurrence pour prouver l'invariant de boucle.

7 Il faut faire une jointure : associer les colonnes ayant la même signification entre les tables.

Partie II

13 `Itau` est une information qui figure dans la liste `XX`.

14 Utiliser `XX` pour calculer la valeur de l'intégrale, inutile de modifier la fonction `f`.

Partie III

17 Il existe deux manières de répondre à cette question, l'une est plus efficace que l'autre et serait probablement valorisée lors de la correction.

20 Attention à faire en sorte que la mise à jour de toutes les cellules soit simultanée : on ne doit pas appeler la fonction `est_exposee` sur une grille partiellement mise à jour.

21 L'énoncé demande ici les proportions de cases dans les différents états et non pas leur nombre comme précédemment.

I. Tri et bases de données

$\boxed{1}$ Lors de l'itération i de la boucle `for`, l'élément i de la liste de départ est descendu jusqu'à sa place dans la liste triée constituée des $i+1$ premiers éléments. Par conséquent, le contenu de la liste évolue de la manière suivante :

- Début de la fonction : `[5, 2, 3, 1, 4]` ;
- Fin de l'itération $i = 1$: `[2, 5, 3, 1, 4]` ;
- Fin de l'itération $i = 2$: `[2, 3, 5, 1, 4]` ;
- Fin de l'itération $i = 3$: `[1, 2, 3, 5, 4]` ;
- Fin de l'itération $i = 4$: `[1, 2, 3, 4, 5]` ;
- Sortie de la fonction : `[1, 2, 3, 4, 5]`.

> Vous aurez sûrement reconnu le tri par insertion !

$\boxed{2}$ Soit $\mathscr{P}(i)$ la propriété

La liste `L[0:i+1]` est triée par ordre croissant à l'issue de l'itération i.

On va montrer par récurrence sur i que $\mathscr{P}(i)$ est vraie pour tout $i \in [\![1\,; n-1]\!]$.

- Lors de la première itération, $i = 1$ donc la valeur du deuxième élément de la liste est affectée à `x`. Deux cas sont alors possibles : soit `L[0] > x` et le corps de la boucle `while` est effectué une seule fois, ce qui a pour effet d'échanger `L[0]` et `L[1]`. Soit `L[0]` $\leqslant$ `x` et le corps de la boucle n'est jamais exécuté. Dans les deux cas, les deux premiers éléments de la liste se retrouvent triés par ordre croissant à la fin de la première itération, ce qui satisfait $\underline{\mathscr{P}(1)}$.
- $\underline{\mathscr{P}(i-1) \Longrightarrow \mathscr{P}(i)}$: $\mathscr{P}(i-1)$ nous permet de considérer que les i premiers éléments de `L` (soit de 0 à $i-1$ inclus) sont triés à la fin de l'itération $i-1$, et donc également au début de l'itération i. On peut alors distinguer deux cas :
  - `L[i]` est supérieur ou égal à tous les éléments de `L[0:i]`. Dans ce cas, le programme n'entre pas dans la boucle `while` puisque sa deuxième condition est fausse, et l'affectation de la ligne 9 ne fait que remplacer `L[j]` par lui-même puisque j est toujours égal à i. La liste `L[0:i+1]` est par conséquent elle aussi triée.
  - Il existe au moins un élément de `L[0:i]` strictement supérieur à `L[i]`. La boucle `while` est exécutée et, à sa sortie, on sait que `L[i] < L[j]` (la condition de la boucle était vraie à l'itération précédente), et que soit $j = 0$, soit `L[j-1]` $\leqslant$ `L[i]` (la condition de la boucle est fausse). Comme tous les éléments de `L` d'indices compris entre j et $i-1$ avant la boucle ont été décalés d'un cran vers la droite, la place est libre en `L[j]` pour accueillir l'ancien `L[i]`. La liste `L[0:i+1]` est donc également triée.

Par conséquent $\boxed{\text{La propriété } \mathscr{P}(i) \text{ est un invariant de boucle.}}$

La dernière itération correspond à $i = n-1$, ainsi $\mathscr{P}(n-1)$ assure que **la liste `L[0:n]`, donc toute la liste, est triée**.

> Une manière mathématiquement équivalente mais un peu plus succincte de démontrer le cas de base de la récurrence aurait été de partir de $\underline{\mathscr{P}(0)}$: bien que l'itération $i = 0$ ne soit pas explicite dans le code, elle correspond à l'état de la liste au début de la fonction, avant la première itération. La liste

> `L[0:1]` ne contient qu'un seul élément, on peut donc la considérer comme triée. Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
>
> Par ailleurs, cela n'était sûrement pas demandé (la démonstration est assez longue ainsi), mais pour être complet, on aurait dû démontrer deux propriétés supplémentaires. D'une part, que l'on indice toujours la liste `L` dans les limites de sa taille et d'autre part que la fonction change uniquement l'ordre des éléments et pas leur valeur. Concernant cette dernière propriété, l'énoncé commet un abus par hypothèse implicite en invitant à déduire de $\mathscr{P}(n)$ la conclusion que `tri(L)` trie, au sens de l'énoncé, la liste `L`. En effet, cette condition, bien que nécessaire, n'est pas suffisante : imaginons que la boucle `for` écrase progressivement chaque élément de `L` avec son premier élément : $\mathscr{P}(i)$ est toujours vraie pour tout i, la liste finale est bien triée puisqu'elle ne contient que n copies de son premier élément, mais elle n'a plus rien à voir avec la liste initiale. Il est donc nécessaire de démontrer également la propriété $\mathscr{Q}(i)$:
>
> À l'issue de l'itération i, la liste `L[0:i+1]` contient les mêmes éléments qu'au début de la fonction.
>
> Cette démonstration, à faire également par récurrence, est laissée en exercice au lecteur !

3 À taille de liste fixée, seul le corps de la boucle `while` est exécuté un nombre variable de fois. Dans le meilleur cas, cette portion de code n'est jamais exécutée : c'est ce qui se passe pour les listes déjà triées. En définissant la complexité de cet algorithme par le nombre de comparaisons entre éléments de la liste qu'il effectue, on trouve dans le meilleur cas que celui-ci est égal à $n-1$ (une par itération de `for`, dans la condition du `while`), par conséquent

$$\boxed{\text{Le meilleur cas, obtenu pour les listes déjà triées, est linéaire } (\mathrm{O}(n)).}$$

Dans le pire cas, la boucle `while` s'exécute le maximum de fois à chaque itération, soit i fois à l'itération i. C'est ce qui se passe lorsque `L` est initialement triée dans l'ordre décroissant. Le nombre de comparaisons d'éléments de la liste est alors

$$1+2+\cdots+(n-1)=\sum_{i=1}^{n-1} i=\frac{n\times(n-1)}{2}$$

$$\boxed{\text{Le pire cas, celui des listes triées dans l'ordre inverse, est quadratique } (\mathrm{O}(n^2)).}$$

Le **tri fusion** a une complexité quasi-linéaire en $\boldsymbol{\mathrm{O}(n\log n)}$ dans le meilleur comme dans le pire cas.

> Attention à ne pas citer le tri rapide, qui, bien que quasi-linéaire en moyenne, est quadratique dans le pire cas.

4 On dispose déjà d'une fonction de tri, il suffit de l'adapter très légèrement pour effectuer la comparaison sur le deuxième élément de chaque liste. On reprend donc entièrement le code de `tri` en modifiant seulement la condition du `while` :

```
def tri_chaine(L):
    n = len(L)
    for i in range(1, n):
        j = i
```