CONCOURS ARTS ET MÉTIERS ParisTech - ESTP - POLYTECH

Épreuve de Mathématiques 1 PSI

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Le candidat devra porter l'ensemble de ses réponses sur le cahier réponses, à l'exclusion de toute autre copie. Les résultats doivent être reportés dans les cadres prévus à cet effet.

Il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance.

Exercice 1.

Dans tout l'exercice, n désigne un entier supérieur ou égal à 3. On note $E = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $\mathscr{B} = (1, X, ..., X^{n-1})$ sa base canonique.

Soient a_1, ... , a_n, n réels vérifiant : $a_1 < a_2 < ... < a_n$.

1. Montrer que l'application $T : P \longmapsto (P(a_1), ..., P(a_n))$ est un isomorphisme de E dans $\mathbb{R}^n$.

2. On note $\mathscr{E} = (e_1, ..., e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on note $L_i = T^{-1}(e_i)$, c'est-à-dire l'unique polynôme dont l'image par T est e_i. Montrer que $\mathscr{B}' = (L_1, ..., L_n)$ est une base de E puis déterminer les composantes d'un polynôme P quelconque de E dans cette base.

Dans la suite de l'exercice, on note $M = (m_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$.

3. **Dans cette question uniquement**, on suppose que $n = 3$, $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ et $a_3 = 2$.

3.1 Donner, sans justification, les polynômes L_1, L_2 et L_3 et expliciter la matrice M.

3.2 Montrer que 1 est valeur propre de la matrice M et déterminer le sous-espace propre associé.

e3a Maths 1 PSI 2017 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Hervé Diet (professeur agrégé) ; il a été relu par Rémi Pellerin (ENS Lyon) et Sophie Rainero (professeur en CPGE).

Ce sujet se compose de quatre exercices indépendants qui couvrent les grands thèmes au programme de la filière PSI.

- Le premier exercice se focalise sur l'espace vectoriel des polynômes sur $\mathbb{R}$. L'énoncé introduit sans le dire la base des polynômes de Lagrange. On étudie des morphismes sur cet espace sous toutes leurs formes possibles. On passe en revue des isomorphismes, des changements de base, l'étude des matrices associées et les éléments propres du morphisme.
- Le deuxième exercice introduit des intégrales de fonctions réelles sur l'intervalle $[\,0\,;+\infty\,[$. Cette partie commence par des questions de cours classiques, pour ensuite s'ouvrir vers l'étude des intégrales sur les fonctions de carré intégrable. Pour réussir cet exercice, il faut bien maîtriser les définitions et propriétés liées à la convergence des intégrales.
- Le troisième exercice porte sur les variables aléatoires et en particulier sur un processus stochastique à temps discret. Il s'agit d'utiliser les propriétés du cours pour justifier l'existence et calculer l'espérance et la variance du processus.
- Le quatrième exercice aborde la programmation sous Python avec le thème de la dichotomie. Dans un premier temps, il s'agit de programmer une fonction de recherche d'un zéro d'une fonction par dichotomie. Ensuite, on passe au tri des listes et à la recherche de la position d'insertion d'un élément. Le but est de construire un tri par insertion basé sur une recherche par dichotomie et de le comparer au tri par insertion du programme.

Ce sujet permettait de vérifier que les candidats maîtrisaient le cours et avaient retenu des études classiques faites pendant l'année. Le document-réponse qui était fourni, et qui tenait lieu de copie, obligeait à adopter une rédaction concise.

Indications

Exercice 1

Exo1-1 Utiliser les dimensions des espaces vectoriels.

Exo1-2 Calculer T(P) en utilisant les deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.

Exo1-3.1 Il faut bien noter que le polynôme L_1 s'annule en 1 et en 2 et qu'il est de degré 2 au plus.

Exo1-3.3 Faire le lien avec la question précédente.

Exo1-4.1 Remarquer que M^{-1} est aussi une matrice de changement de base.

Exo1-4.2 Étudier l'image par T de 1 et de $\sum\limits_{i=1}^{n} L_i$.

Exo1-4.4 Donner $L_i(1)$ en fonction de i puis l'exprimer en fonction des coefficients $m_{i,j}$.

Exo1-5.1 Dissocier les cas en fonction de la présence des valeurs 0, 1 et 2 parmi les réels a_i. Une erreur d'énoncé a été commise dans la définition de u et complique cette question.

Exo1-5.2 Impossible de résoudre cette question sans modifier u. Pour poursuivre, l'endomorphisme u doit être défini par la relation :

$$u(P) = Q \quad \text{si} \quad Q(X) = P(a_1)L_1(X) + P(a_2)L_2(X) + P(a_3)L_3(X)$$

Exercice 2

Exo2-C-2 Utiliser la question précédente pour majorer fg.

Exo2-P1-1 On peut ici étudier la série de terme général J_n.

Exo2-P1-2 Il faut définir le terme a_n par rapport à J_n.

Exo2-P2-1 On peut réutiliser ici l'une des questions de cours.

Exo2-P2-2 Une intégration par parties permettra de faire apparaître les deux intégrales voulues.

Exo2-P2-4 En utilisant le cas d'égalité dans le théorème de Cauchy-Schwarz, montrer que les fonctions $t \mapsto tf(t)$ et $t \mapsto f'(t)$ sont liées.

Exercice 3

Exo3-1 Comparer les variables aléatoires Y et $\sum\limits_{i=0}^{n} X_i$.

Exo3-2 Il faut se servir du système complet d'événements proposé et de la formule des probabilités totales qui en découle.

Exercice 4

Exo4-PA-1.1 Penser à utiliser le théorème des valeurs intermédiaires.

Exo4-PA-1.2 Un algorithme de dichotomie doit couper l'intervalle de recherche en deux puis décider de garder l'une ou l'autre des parties de l'intervalle pour poursuivre la recherche.

Exo4-PA-1.3 Réutiliser le résultat de la question Exo4-PA-1.1.

Exo4-PB-1.3 On pourra se servir du logarithme en base 2, $\log_2$, pour exprimer la complexité recherchée.

Exo4-PB-3 Il faut commencer par donner la complexité en affectations du programme `rech_dicho`. La formule de Stirling sera nécessaire pour expliciter la complexité voulue.

Exercice 1

Exo1-1 Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour tout $(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) \in \mathrm{E}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $(\mathrm{P} + \lambda\mathrm{Q})(a) = \mathrm{P}(a) + \lambda\mathrm{Q}(a)$. Ainsi, $\mathrm{P} \mapsto \mathrm{P}(a)$ est une application linéaire de E dans $\mathbb{R}$. Par extension, on montre ainsi que T est une application linéaire de E dans $\mathbb{R}^n$. Ces deux espaces sont de même dimension finie. En effet :

$$\dim \mathrm{E} = \dim \mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}] = n = \dim \mathbb{R}^n$$

Il suffit maintenant de montrer que T est injective. Soit $\mathrm{P} \in \mathrm{Ker}\ \mathrm{T}$. Alors

$$\mathrm{P}(a_1) = \mathrm{P}(a_2) = \cdots = \mathrm{P}(a_n) = 0 \text{ avec } a_1 < a_2 < \cdots < a_n$$

Le polynôme $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]$ possédant n racines distinctes, c'est le polynôme nul. On a ainsi montré que $\mathrm{Ker}\ \mathrm{T} \subset \left\{0_{\mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]}\right\}$. L'autre inclusion étant toujours vérifiée, on a $\mathrm{Ker}\ \mathrm{T} = \left\{0_{\mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]}\right\}$. L'application T est bien un morphisme injectif entre deux espaces de même dimension. Par conséquent,

$$\boxed{\text{L'application T est un isomorphisme de E dans } \mathbb{R}^n.}$$

Exo1-2 La famille $\mathcal{B}'$ est l'image par l'isomorphisme T^{-1} de la base canonique $\mathcal{E}$ de l'espace $\mathbb{R}^n$. On en déduit que :

$$\boxed{\text{La famille } \mathcal{B}' \text{ forme une base de E.}}$$

> La base $(\mathrm{L}_1, \ldots, \mathrm{L}_n)$ introduite ici est en fait la base bien connue des polynômes de Lagrange. Ces polynômes permettent en particulier d'exprimer facilement un polynôme passant par une liste de points du plan fixée. On parle d'interpolation polynomiale.

Dans la base $\mathcal{B}'$, on peut exprimer $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]$ comme une combinaison linéaire des L_i. Ainsi, il existe $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\mathrm{P}(\mathrm{X}) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \mathrm{L}_i$. Alors, d'une part

$$\begin{aligned}
\mathrm{T}(\mathrm{P}) &= \mathrm{T}\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i \mathrm{L}_i\Big) & \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i \mathrm{T}(\mathrm{L}_i) & \text{car T est linéaire} \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i e_i & \text{par définition des } \mathrm{L}_i \\
\mathrm{T}(\mathrm{P}) &= (x_1, x_2, \ldots, x_n) &
\end{aligned}$$

et, d'autre part $\qquad \mathrm{T}(\mathrm{P}) = (\mathrm{P}(a_1), \mathrm{P}(a_2), \ldots, \mathrm{P}(a_n))$

On en déduit que $x_i = \mathrm{P}(a_i)$, pour tout $i \in [\![1\,; n]\!]$, par unicité de l'écriture dans une base. Finalement,

$$\boxed{\text{Si } \mathrm{P} \in \mathrm{E}, \text{ alors } \mathrm{P}(\mathrm{X}) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(a_i)\mathrm{L}_i(\mathrm{X}).}$$

Exo1-3.1 On donne directement

$$\boxed{\mathrm{L}_1(\mathrm{X}) = \frac{1}{2}(\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}-2) \qquad \mathrm{L}_2(\mathrm{X}) = -\mathrm{X}(\mathrm{X}-2) \qquad \mathrm{L}_2(\mathrm{X}) = \frac{1}{2}\mathrm{X}(\mathrm{X}-1)}$$

> On rappelle que la définition du polynôme de Lagrange est
> $$\mathrm{L}_i(\mathrm{X}) = \prod_{\substack{j\in[\![1\,;\,n]\!]\\ j\neq i}} \frac{\mathrm{X}-a_j}{a_i-a_j}$$
> Si l'on ne retrouve plus cette formule, on peut remarquer qu'il existe λ tel que $\mathrm{L}_1(\mathrm{X}) = \lambda(\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}-2)$ puisque L_i s'annule en 1 et 2, et doit être de degré 2. Il suffit alors de choisir la constante λ pour que $\mathrm{L}_1(0) = 1$ puis de faire de même pour L_2 et L_3.

On peut exprimer les polynômes de la base $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{L}_1(\mathrm{X}) &= \frac{1}{2}(\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}-2) = 1-\frac{3}{2}\mathrm{X}+\frac{1}{2}\mathrm{X}^2\\
\mathrm{L}_2(\mathrm{X}) &= -\mathrm{X}(\mathrm{X}-2) = 0+2\mathrm{X}-\mathrm{X}^2\\
\mathrm{L}_3(\mathrm{X}) &= \frac{1}{2}\mathrm{X}(\mathrm{X}-1) = 0-\frac{1}{2}\mathrm{X}+\frac{1}{2}\mathrm{X}^2
\end{aligned}$$

La matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ peut être donnée en écrivant les coordonnées des polynômes L_i dans chaque colonne :

$$\boxed{\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ -\dfrac{3}{2} & 2 & -\dfrac{1}{2}\\ \dfrac{1}{2} & -1 & \dfrac{1}{2}\end{pmatrix}}$$

Exo1-3.2 Soit $\mathrm{X} = {}^t(x,y,z)$ un vecteur quelconque. Résolvons le système $\mathrm{MX} = \mathrm{X}$:

$$\mathrm{MX}=\mathrm{X} \iff \begin{cases} x = x\\ -\dfrac{3}{2}x+2y-\dfrac{1}{2}z = y\\ \dfrac{1}{2}x-y+\dfrac{1}{2}z = z\end{cases} \iff \begin{cases}-3x+2y-z=0\\ x-2y-z=0\end{cases}$$

En additionnant la première ligne du système à la deuxième, on obtient le système équivalent

$$\begin{aligned}
\mathrm{MX}=\mathrm{X} &\iff \begin{cases}-3x+2y-z=0\\ -2x-2z=0\end{cases}\\
&\iff \begin{cases}-3x+2y-z=0\\ z=-x\end{cases}\\
&\iff \begin{cases}-2x+2y=0\\ z=-x\end{cases}\\
\mathrm{MX}=\mathrm{X} &\iff \begin{cases}y=x\\ z=-x\end{cases}
\end{aligned}$$

On peut donc en déduire que

$$\mathrm{MX}=\mathrm{X} \iff \mathrm{X} = {}^t(x,x,-x) = x\,{}^t(1,1,-1)$$

et ainsi $\boxed{\text{Le réel 1 est une valeur propre de M et son sous-espace propre associée est } \mathbb{R}^t(1,1,-1).}$

e3a Maths 2 PSI 2017 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Loïc Devilliers (ENS Cachan) ; il a été relu par Sophie Rainero (professeur en CPGE) et Benjamin Monmege (enseignant-chercheur à l'université).

Ce sujet propose d'étudier les matrices nilpotentes de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Il est composé de sept parties. Les cinq dernières sont largement indépendantes les unes des autres.

- La partie préliminaire contient quatre questions de cours à traiter rapidement.
- La partie I, la plus longue, fait établir quelques résultats généraux sur les matrices nilpotentes qui pourront être utilisés par la suite.
- La partie II s'intéresse à deux exemples : le premier considère une matrice nilpotente de taille n constituée uniquement de 1 strictement au-dessus de la diagonale et de 0 ailleurs. Le second propose de décrire l'ensemble des matrices nilpotentes de taille 2.
- La partie III a pour but de montrer que l'espace vectoriel engendré par les matrices nilpotentes est l'espace des matrices de trace nulle.
- Dans la partie IV, on démontre qu'un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ uniquement constitué de matrices nilpotentes est de dimension au plus $n(n-1)/2$.
- Dans la partie V, on montre que l'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est un fermé d'intérieur vide.
- La partie VI, enfin, considère le cas des matrices qui sont la somme de la matrice identité et d'une matrice nilpotente. On montre que ces matrices admettent un inverse et une racine carrée, qui s'écrivent l'une et l'autre comme un polynôme en la matrice nilpotente.

Outre les questions de cours, ce sujet contient dans les parties I à IV des questions classiques sur les matrices nilpotentes (comme la somme de deux matrices nilpotentes qui commutent) et sur les sous-espaces vectoriels classiques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ (matrices symétriques, antisymétriques, triangulaires supérieures). Ces thèmes très classiques doivent absolument être maîtrisés quand on arrive aux concours. Les candidats qui s'étaient bien préparés ont pu traiter ces questions en faisant appel à leur mémoire en plus de leur réflexion, et se ménager ainsi du temps pour aborder les parties V et VI, qui étaient plus difficiles.

Indications

Partie I

I-1 Montrer que A n'est pas inversible en considérant son déterminant.

I-2 Montrer que $\mathrm{sp}\,(\mathrm{A}) = \{0\}$ et que $\chi_{\mathrm{A}}(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^n$.

I-3 Prouver qu'une matrice diagonalisable et nilpotente est forcément nulle.

I-5 Justifier et utiliser une relation entre $({}^t\mathrm{A})^k$ et ${}^t(\mathrm{A}^k)$ pour $k \in \mathbb{R}$.

I-7 Utiliser le théorème de Cayley-Hamilton.

I-9 On considérera une matrice triangulaire supérieure stricte de rang $n-1$.

I-10.2 On utilisera la formule du binôme de Newton.

I-11 Utiliser le fait que les matrices symétriques réelles sont diagonalisables, puis la question I-3.

I-12.1 Grâce à la question I-10.2, montrer que ${}^t\mathrm{A}\,\mathrm{A}$ est symétrique et nilpotente.

I-12.2 Montrer que si $\mathrm{Tr}\,({}^t\mathrm{A}\,\mathrm{A}) = 0$ alors $\mathrm{A} = \mathrm{O}_n$.

Partie II

II-1.2 Montrer que S est symétrique. De plus, $\mathrm{S} = \mathrm{J} - \mathrm{I}_n$ avec J la matrice carrée d'ordre n constituée uniquement de 1. Trouver un polynôme annulateur de S.

II-2.1 Utiliser le théorème de Cayley-Hamilton. Distinguer les deux cas $\mathrm{Tr}\,(\mathrm{M}) = 0$ et $\mathrm{Tr}\,(\mathrm{M}) \neq 0$.

Partie III

III-3.3 On considérera une combinaison linéaire de ces matrices, puis on récrira cette combinaison dans la base canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

III-3.4 Déduire de la question précédente que $\dim \mathrm{V} = \dim \mathrm{T}_0$, puis conclure en utilisant la question III-2.

Partie IV

IV-1 On exhibera une base de $\mathcal{T}_1$.

IV-3 Montrer que $\mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{T}_1 = \{0\}$ puis que $\dim \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) + \dim \mathcal{T}_1 = \dim \mathscr{E}$.

IV-4.1 Utiliser la formule de Grassmann.

IV-4.2 Utiliser les questions IV-4.1 et IV-1.

Partie V

V-1 Considérer une suite de matrices nilpotentes. Utiliser la question I-7.

V-3 On appliquera ce qui précède au sous-espace vectoriel T_0.

Partie VI

VI-1 Utiliser l'égalité entre polynômes : $(1 - (-\mathrm{X})^n) = (1+\mathrm{X})\Big(\sum\limits_{k=0}^{n-1} (-\mathrm{X})^k\Big)$.

VI-3 Soit $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ les coefficients du développement en série entière exprimés à la question VI-2. On montrera que $\mathrm{B} = \sum\limits_{k=0}^{n-1} c_k \alpha^k \mathrm{A}^k$ convient, en effectuant un produit de Cauchy et en utilisant l'unicité du développement en série entière de $x \mapsto (1+x)^{1/2}$.

Questions de cours

QC1 $\boxed{\text{La dimension de } \mathscr{E} \text{ est } n^2\text{. Une base de } \mathscr{E} \text{ est } (\mathrm{E}_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}.}$

QC2 Notons que les coefficients de la matrice $\mathrm{E}_{i,j}$ sont donnés par

$$\mathrm{E}_{i,j} = (\delta_{a,i}\delta_{b,j})_{1\leqslant a,b\leqslant n} \text{ où } \delta \text{ est le symbole de Kronecker.}$$

Posons $\mathrm{E} = \mathrm{E}_{i,j}\mathrm{E}_{k,\ell}$, et notons $(e_{a,b})_{1\leqslant a,b\leqslant n}$ les coefficients de la matrice E. Considérons $(a,b) \in [\![\, 1\,;n\,]\!]^2$, calculons le coefficient $e_{a,b}$ de la matrice E :

$$e_{a,b} = \sum_{c=1}^{n} \delta_{a,i}\delta_{c,j} \times \delta_{c,k}\delta_{b,\ell} = \delta_{j,k}\delta_{a,i}\delta_{b,\ell}$$

Comme $(\delta_{a,i}\delta_{b,\ell})_{1\leqslant a,b\leqslant n}$ est la famille des coefficients de la matrice $\mathrm{E}_{i,\ell}$, on trouve

$$\boxed{\mathrm{E}_{i,j}\mathrm{E}_{k,\ell} = \delta_{j,k}\mathrm{E}_{i,\ell}\text{, en particulier ce produit est nul dès que } j \neq k.}$$

QC3 Soit $\mathbb{K}$ un corps égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit A une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on note $\chi_{\mathrm{A}}(\mathrm{X})$ le polynôme caractéristique de A. Le théorème de Cayley-Hamilton affirme que

$$\boxed{\chi_{\mathrm{A}}(\mathrm{A}) = \mathrm{O}_n}$$

QC4 $\boxed{\text{La matrice M est trigonalisable dans } \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \text{ si et seulement si le polynôme caractéristique de M est scindé sur } \mathbb{K}.}$

> D'après le théorème de d'Alembert-Gauss, tout polynôme de $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$ est scindé. On en déduit, en particulier, que toute matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable.

I. Propriétés élémentaires

I-1 La matrice A étant dans $\mathscr{N}$, on considère, dans toute cette partie, p un entier naturel fixé tel que $\mathrm{A}^p = \mathrm{O}_n$.

Montrons que la matrice A n'est pas inversible. Comme $\mathrm{A}^p = \mathrm{O}_n$ et que le déterminant d'un produit de matrices est égal au produit des déterminants de ces matrices, il vient

$$\det(\mathrm{A})^p = \det(\mathrm{A}^p) = \det(\mathrm{O}_n) = 0$$

d'où $\det \mathrm{A} = 0$. On peut donc en conclure que

$$\boxed{\text{La matrice A n'est pas inversible.}}$$

I-2 Soient $\lambda \in \mathrm{sp}\,(\mathrm{A})$ et x un vecteur propre de A associé à λ : $\mathrm{A}x = \lambda x$. Une récurrence immédiate montre que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathrm{A}^k x = \lambda^k x$. En particulier, pour $k = p$, il vient

$$0 = \mathrm{A}^p x = \lambda^p x$$

Comme x n'est pas nul, on en déduit que $\lambda^p = 0$, puis que $\lambda = 0$. Par conséquent, $\mathrm{sp}\,(\mathrm{A}) \subset \{0\}$. Réciproquement, 0 est bien valeur propre de A, car A n'est pas inversible d'après la question précédente. Par double inclusion,

$$\boxed{\mathrm{sp}\,(\mathrm{A}) = \{0\}}$$

Dans $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$, $\chi_{\mathrm{A}}(\mathrm{X})$, le polynôme caractéristique de A, est unitaire, scindé et de degré n. Dès lors, il existe $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ tel que

$$\chi_{\mathrm{A}}(\mathrm{X}) = \prod_{i=1}^{n} (\mathrm{X} - \lambda_i)$$

De plus, les racines de $\chi_{\mathrm{A}}(\mathrm{X})$ sont les valeurs propres de A. Ici, les valeurs propres de A sont toutes nulles, donc pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, $\lambda_i = 0$. En conclusion,

$$\boxed{\text{Le polynôme caractéristique de A est } \chi_{\mathrm{A}}(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^n.}$$

I-3 Supposons que la matrice nilpotente A soit diagonalisable. La matrice A est alors semblable à une matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont les valeurs propres de A. D'après la question I-2, la seule valeur propre de A est 0, ainsi la matrice A est semblable à O_n. Or, seule O_n est semblable à O_n, donc $\mathrm{A} = \mathrm{O}_n$. Réciproquement, la matrice O_n est diagonalisable et nilpotente. Ainsi,

$$\boxed{\text{La matrice A est diagonalisable si et seulement si } \mathrm{A} = \mathrm{O}_n.}$$

I-4 Soit B une matrice de $\mathrm{Vect}\,(\mathrm{A})$, considérons $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{B} = \lambda\mathrm{A}$, par conséquent, $\mathrm{B}^p = \lambda^p \mathrm{A}^p = \mathrm{O}_n$, d'où $\mathrm{B} \in \mathscr{N}$. Finalement,

$$\boxed{\mathrm{Vect}\,(\mathrm{A}) \subset \mathscr{N}}$$

I-5 Rappelons que ${}^t(\mathrm{CD}) = {}^t\mathrm{D}\ {}^t\mathrm{C}$ pour D et C deux matrices de $\mathscr{E}$. Ainsi, par une récurrence immédiate sur l'entier naturel k, on a

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad {}^t(\mathrm{A}^k) = ({}^t\mathrm{A})^k$$

Ainsi, $$({}^t\mathrm{A})^p = {}^t\mathrm{O}_n = \mathrm{O}_n$$

En conclusion, $$\boxed{{}^t\mathrm{A} \in \mathscr{N}}$$

I-6 Supposons que la matrice M soit semblable à la matrice A. Considérons alors une matrice P inversible de $\mathscr{E}$ telle que $\mathrm{M} = \mathrm{PAP}^{-1}$. Une récurrence immédiate sur $k \in \mathbb{N}$ montre que

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \mathrm{M}^k = \mathrm{PA}^k\mathrm{P}^{-1}$$

En prenant $k = p$, il vient $\mathrm{M}^p = \mathrm{PA}^p\mathrm{P}^{-1} = \mathrm{PO}_n\mathrm{P}^{-1} = \mathrm{O}_n$.

$$\boxed{\text{Si M est semblable à A, alors } \mathrm{M} \in \mathscr{N}.}$$

I-7 À la question I-2, on a vu que le polynôme caractéristique de A est X^n. De plus, d'après le théorème de Cayley-Hamilton (énoncé à la question de cours QC3), ce polynôme est annulateur de A. On en déduit que

$$\boxed{\mathrm{A}^n = \mathrm{O}_n}$$

CCP Maths PSI 2017 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Bertrand Wiel (professeur agrégé) ; il a été relu par Matthias Moreno Ray (professeur en CPGE) et Benoit Chevalier (ENS Ulm).

L'épreuve est constituée de deux problèmes indépendants, un d'algèbre (matrices orthogonales, réduction), un second d'analyse (intégrales dépendant d'un paramètre, séries de fonctions et séries numériques). Il couvre une large partie du programme de PSI à l'exception notable des probabilités.

Le premier problème comporte deux parties,

- La première s'intéresse au cas de la dimension deux. On étudie une application de l'ensemble des matrices antisymétriques vers le groupe spécial orthogonal privé de la matrice $-\mathrm{I}_2$, et on exhibe sa réciproque.
- La deuxième partie traite des valeurs propres d'une matrice antisymétrique en dimension quelconque puis établit l'existence d'applications entre l'ensemble des matrices antisymétriques et l'ensemble des matrices orthogonales n'ayant pas la valeur propre -1. En fin de problème, on montre que dans $\mathbb{R}^3$ toute rotation R qui n'est pas un retournement peut être paramétrée par une matrice antisymétrique A de la manière suivante :
$$\mathrm{R} = (\mathrm{I}_3 + \mathrm{A})^{-1}(\mathrm{I}_3 - \mathrm{A})$$

Le second problème est constitué de trois parties,

- Dans la première, on établit des résultats préliminaires en admettant le théorème de Weierstrass d'approximation d'une fonction continue sur un segment par une suite de fonctions polynomiales.
- La deuxième partie est consacrée au calcul de l'intégrale de Dirichlet
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$$
par la méthode de transformation de Laplace. C'est l'occasion de mettre en œuvre les théorèmes et techniques d'intégration du programme. Elle demande beaucoup de soin dans la rédaction, en particulier concernant le rappel et la vérification des hypothèses des théorèmes portant sur les intégrales dépendant d'un paramètre.
- Dans la troisième, on met en lumière le « phénomène de Gibbs », c'est-à-dire l'existence d'un écart local, minoré par une constante, entre une certaine fonction et sa somme de Fourier, en manipulant les différents types de séries du programme et en s'appuyant sur le théorème de convergence dominée et le théorème spécial des séries alternées.

À l'exception des questions 7 et 8 du problème d'algèbre, l'épreuve avait un niveau de difficulté constant, sans question particulièrement ardue. Le candidat progressait en général en terrain connu, bien guidé par l'énoncé. Toutefois, la diversité des notions mises en œuvre, la longueur du sujet, le soin nécessaire à la rédaction des preuves dans le second problème et le besoin de recourir plusieurs fois et sans indication à des transformations trigonométriques, exigeaient un bon degré de préparation. En ce sens, cette épreuve constitue un très bon test d'auto-évaluation à passer au cours de la période précédant les écrits.

Indications

Problème 1

Q2 Calculer ${}^t\mathrm{R}\,\mathrm{R}$ pour établir l'orthogonalité de la matrice R.

Q3 Utiliser les propriétés de calcul des matrices de rotation.

Q5 Utiliser d'abord le fait que X est un vecteur propre puis exploiter l'antisymétrie de A.

Q6 Utiliser le fait que, d'après la question 5, la matrice A n'a pas de valeur propre réelle, et le résultat de la question 4.

Q7 Décomposer le polynôme caractéristique de A en une puissance de X et un polynôme Π sans racine réelle. Justifier que Π est de degré pair et exprimer le déterminant de R à l'aide de ce polynôme.

Q8 Multiplier chacune des matrices ${}^t\mathrm{A}$ et $-\mathrm{A}$ à gauche par $(\mathrm{I}_n + \mathrm{R})$ et à droite par $(\mathrm{I}_n + \mathrm{R}^{-1})$.

Q9 Compléter le vecteur u en une base orthonormée et appliquer la construction de la question 8 et les résultats de la partie I.

Problème 2

Q10 Intégrer par parties et majorer l'expression sous le signe intégral.

Q12 Appliquer le résultat de la question 11 à un polynôme approchant la fonction f sur l'intervalle $[\,\alpha\,;\beta\,]$.

Q13 Partir de la formule $\sin^2(u) = (1-\cos(2u))/2$ et utiliser le résultat de la question 12.

Q15 Utiliser les résultats de la question 14 avec la fonction sinus.

Q16 Utiliser le théorème de continuité sous le signe intégral.

Q18.2 Résoudre un système 2×2 en les variables $\alpha'(x)$ et $\beta'(x)$.

Q18.3 Écrire la solution trouvée en 18.2 sous forme intégrale et faire un changement de variable.

Q19 Majorer l'intégrale après avoir effectué une intégration par parties.

Q20 Comparer à une intégrale de Riemann pour la convergence en $+\infty$. Étudier la convergence en 0 en utilisant l'inégalité $\sin(t) \leqslant t$, valable sur $\mathbb{R}_+$.

Q22 Se ramener au calcul d'une somme géométrique.

Q23 Reprendre la méthode utilisée à la question 22.

Q25 Utiliser le résultat de la question 12 avec des fonctions f et φ adaptées.

Q27 Se servir de l'équivalence $\sin(x) \underset{0}{\sim} x$.

Q28 Établir
$$\mathrm{S}_n\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \varphi_{n+1}(u)\,\mathrm{d}u$$
puis appliquer le théorème de convergence dominée en utilisant le résultat de la question 27.

Q29 Partir du développement en série entière de la fonction $x \longmapsto \sin(x)$.

Q30 Utiliser le théorème spécial des séries alternées.

Problème 1

Q1 Calculons le polynôme caractéristique de la matrice A.

$$\chi_{\mathrm{A}}(\mathrm{X}) = \det(\mathrm{X}\,\mathrm{Id} - \mathrm{A}) = \begin{vmatrix} \mathrm{X} & -t \\ t & \mathrm{X} \end{vmatrix} = \mathrm{X}^2 + t^2 = (\mathrm{X} - \mathrm{i}t)(\mathrm{X} + \mathrm{i}t)$$

$$\boxed{\text{Les valeurs propres complexes de A sont } \mathrm{i}t \text{ et } -\mathrm{i}t \text{ si } t \neq 0, \text{ et } 0 \text{ sinon.}}$$

Q2 D'après la question 1, la matrice A ne peut avoir comme valeur propre 1, ainsi la matrice $(\mathrm{I}_2 - \mathrm{A})$ est inversible. On sait par ailleurs que si elle existe, c'est-à-dire si son déterminant est non nul, l'inverse d'une matrice 2×2 est donné par

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Ainsi,
$$\begin{aligned} (\mathrm{I}_2 - \mathrm{A})^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & -t \\ t & -1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{1+t^2} \begin{pmatrix} 1 & t \\ -t & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

d'où
$$(\mathrm{I}_2 + \mathrm{A})(\mathrm{I}_2 - \mathrm{A})^{-1} = \frac{1}{1+t^2} \begin{pmatrix} 1 & t \\ -t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t \\ -t & 1 \end{pmatrix}$$

soit, finalement
$$\boxed{\mathrm{R} = \frac{1}{1+t^2} \begin{pmatrix} 1-t^2 & 2t \\ -2t & 1-t^2 \end{pmatrix}}$$

Pour montrer l'orthogonalité de R, calculons ${}^t\mathrm{R}\,\mathrm{R}$.

$$\begin{aligned} {}^t\mathrm{R}\,\mathrm{R} &= \frac{1}{(1+t^2)^2} \begin{pmatrix} 1-t^2 & -2t \\ 2t & 1-t^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-t^2 & 2t \\ -2t & 1-t^2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{(1+t^2)^2} \begin{pmatrix} (1-t^2)^2 + 4t^2 & 2t(1-t^2) - 2t(1-t^2) \\ 2t(1-t^2) - 2t(1-t^2) & 4t^2 + (1-t^2)^2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1 - 2t^2 + t^4 + 4t^2}{(1+t^2)^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ {}^t\mathrm{R}\,\mathrm{R} &= \mathrm{I}_2 \end{aligned}$$

La matrice R est donc orthogonale.

Enfin,
$$\begin{aligned} \det \mathrm{R} &= \det \left(\frac{1}{1+t^2} \begin{pmatrix} 1-t^2 & 2t \\ -2t & 1-t^2 \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{(1+t^2)^2} \begin{vmatrix} 1-t^2 & 2t \\ -2t & 1-t^2 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{(1+t^2)^2} ((1-t^2)^2 + 4t^2) = 1 \end{aligned}$$

donc $\boxed{\text{La matrice R appartient au groupe spécial orthogonal.}}$

Q3 Pour tout réel $\theta \in \mathbb{R}\backslash\pi\mathbb{Z}$, on va essayer de se ramener à des matrices plus faciles à manipuler, en se souvenant que $1+\cos\theta = 2\cos^2(\theta/2)$. On a

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_2 + \mathrm{R}_\theta &= \begin{pmatrix} 1+\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & 1+\cos\theta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2\cos^2\theta/2 & -2\sin(\theta/2)\cos(\theta/2) \\ 2\sin(\theta/2)\cos(\theta/2) & 2\cos^2(\theta/2) \end{pmatrix} \\
\mathrm{I}_2 + \mathrm{R}_\theta &= 2\cos(\theta/2)\,\mathrm{R}_{\theta/2}
\end{aligned}$$

En particulier, la matrice $\mathrm{I}_2 + \mathrm{R}_\theta$ est inversible car une matrice de rotation est inversible, et $\cos(\theta/2) \neq 0$ puisque par hypothèse θ n'est pas dans $\pi\mathbb{Z}$. De cette inversibilité et des propriétés des matrices de rotation, on déduit

$$(\mathrm{I}_2 + \mathrm{R}_\theta)^{-1} = (2\cos(\theta/2))^{-1}\,\mathrm{R}_{-\theta/2} \qquad (\mathrm{R}_\alpha^{-1} = \mathrm{R}_{-\alpha})$$

et
$$\mathrm{I}_2 - \mathrm{R}_\theta = \mathrm{I}_2 + \mathrm{R}_{\theta+\pi} = 2\cos((\theta+\pi)/2)\,\mathrm{R}_{(\theta+\pi)/2} \qquad (-\mathrm{R}_\theta = \mathrm{R}_{\theta+\pi})$$

et donc
$$\begin{aligned}
(\mathrm{I}_2 + \mathrm{R}_\theta)^{-1}(\mathrm{I}_2 - \mathrm{R}_\theta) &= \frac{2\cos((\theta+\pi)/2)}{2\cos(\theta/2)}\mathrm{R}_{-\theta/2}\mathrm{R}_{(\theta+\pi)/2} \\
&= \frac{-\sin(\theta/2)}{\cos(\theta/2)}\mathrm{R}_{-\theta/2}\mathrm{R}_{(\theta+\pi)/2} \\
(\mathrm{I}_2 + \mathrm{R}_\theta)^{-1}(\mathrm{I}_2 - \mathrm{R}_\theta) &= -\tan(\theta/2)\,\mathrm{R}_{\pi/2} \qquad (\mathrm{R}_\alpha\mathrm{R}_{\beta'} = \mathrm{R}_{\alpha+\beta'})
\end{aligned}$$

d'où
$$\boxed{\mathrm{M} = (\mathrm{I}_2 + \mathrm{R}_\theta)^{-1}(\mathrm{I}_2 - \mathrm{R}_\theta) = \begin{pmatrix} 0 & \tan(\theta/2) \\ -\tan(\theta/2) & 0 \end{pmatrix}}$$

> La transformation de la question 2 faisait correspondre à toute matrice antisymétrique réelle A de dimension deux une matrice de rotation d'angle différent de π. Celle de la question 3 en est la réciproque et permet de construire depuis une matrice de rotation qui n'est pas un retournement une matrice antisymétrique réelle. Cette construction va être généralisée à la dimension n dans la suite.

Q4 Multiplions l'égalité $\mathrm{CB} = \mathrm{BC}$ à gauche et à droite par la matrice C^{-1} :

$$\mathrm{C}^{-1}\mathrm{CBC}^{-1} = \mathrm{C}^{-1}\mathrm{BCC}^{-1}$$

d'où
$$\boxed{\mathrm{BC}^{-1} = \mathrm{C}^{-1}\mathrm{B}}$$

Q5 Comme X est par hypothèse un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ, on a $\mathrm{AX} = \lambda\mathrm{X}$. Par suite,

$${}^t(\mathrm{AX})\overline{\mathrm{X}} = {}^t(\lambda\mathrm{X})\overline{\mathrm{X}} = \lambda\,{}^t\mathrm{X}\,\overline{\mathrm{X}} = \lambda\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2$$

Par ailleurs, puisque A est antisymétrique réelle,

$${}^t(\mathrm{AX})\overline{\mathrm{X}} = {}^t\mathrm{X}(-\mathrm{A})\overline{\mathrm{X}} = -\,{}^t\mathrm{X}\,\overline{\mathrm{AX}} = -\,{}^t\mathrm{X}\,\overline{\lambda\mathrm{X}} = -\overline{\lambda}\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2$$

Le vecteur X n'étant pas nul, on en déduit que $\lambda = -\overline{\lambda}$. En conclusion

$$\boxed{\lambda \text{ est un complexe imaginaire pur (éventuellement nul).}}$$

> Un raisonnement analogue permet de montrer que les valeurs propres d'une matrice symétrique réelle sont réelles.

CCP Informatique PSI 2017 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Jean-Julien Fleck (professeur en CPGE) ; il a été relu par Josselin Giet (ENS Ulm) et Julien Dumont (professeur en CPGE).

Ce sujet bien articulé et progressif étudie la circulation automobile et l'évolution de bouchons aux heures de pointe sur l'autoroute, depuis l'étude expérimentale via le suivi de la circulation jusqu'aux simulations numériques en utilisant soit la mécanique des fluides, soit des automates cellulaires.

- La première partie se concentre sur les aspects « expérimentaux » en interrogeant une base de données (questions 1 et 2) qui stocke les informations autoroutières avant de les représenter graphiquement (question 3) et de les traiter automatiquement pour détecter un ralentissement via un algorithme de tri par insertion destiné à calculer la médiane des vitesses mesurées (questions 4 et 5).
- Vient alors une première proposition de simulation (questions 6 à 15) qui traite le trafic routier comme un flux hydrodynamique, ce qui revient à résoudre une équation aux dérivées partielles par différentes méthodes afin d'analyser leurs points forts ainsi que leurs motifs de divergence.
- Une seconde simulation à base d'automates cellulaires (questions 16 à 19) clôt le sujet en se rapprochant légèrement du sujet d'informatique des Mines de la même année, sans pour autant faire doublon avec lui. L'avantage est que l'on peut très rapidement comprendre comment créer ses propres bouchons à partir de coups de freins intempestifs de conducteurs peu attentifs.

Le sujet balaie une grande partie du programme de première année avec une brève incursion en deuxième année concernant l'algorithme de tri présenté en question 4. Il permet de se familiariser avec une structure de données matricielle qui stocke les évolutions temporelle et spatiale des objets considérés en une seule entité, ce qui peut certainement être utilisé dans un TIPE lors de simulations similaires. D'ailleurs, l'ensemble des codes permettant de reproduire certaines des figures de ce corrigé sont disponibles à l'adresse

`https://github.com/jjfPCSI1/codes_concours_CPGE`

Pour ceux qui voudraient aller plus avant dans la partie physique, le sujet PSI Centrale 2005, disponible sur `Doc-Solus.fr`, traite assez complètement de la modélisation physique abordée par ce sujet.

Indications

Partie II

1 La difficulté est dans la jointure.

2 Penser à l'instruction `GROUP BY`.

3 L'usage de Numpy trivialise quelque peu la fonction, mais on peut tout à fait faire explicitement les boucles.

4 Se demander comment on fait pour trier « naturellement » ses cartes.

5 Que se passe-t-il pendant au moins la moitié du temps ?

Partie III

7 Là encore, Numpy simplifie les choses.

8 La dépendance temporelle n'influe que sur l'intervalle de concentrations explorées.

9 Penser à jeter un œil en question 11 pour savoir les arguments a priori attendus par le concepteur du sujet.

10 Il s'agit, comme d'habitude en physique, d'approximer les dérivées par leurs taux d'accroissement, tantôt selon l'axe temporel, tantôt selon l'axe spatial, selon la dérivée considérée.

11 Pour éviter de traîner de multiples vérifications à droite des listes, penser à utiliser l'opération modulo (via l'opérateur `%`) pour mettre en place les conditions aux limites périodiques.

13 Le schéma d'intégration est adapté pour un déplacement dans le sens des flèches des représentations de la question 12.

14 L'introduction d'une fonction annexe pour la dérivation peut permettre de simplifier le code.

Partie IV

16 Se rappeler qu'on désire modéliser la réalité et que, dans celle-ci, une voiture a une certaine longueur. Pour le calcul de la vitesse, ne pas oublier les changements d'unités adéquats.

17 Traduire les trois premières étapes de l'algorithme proposé à chaque fois que l'on croise une voiture dans une case.

18 Ne pas oublier qu'il ne faut prédire un déplacement que si une voiture est effectivement présente dans la case considérée.

19 Les bouchons correspondent aux agrégats noirs. Pour améliorer la simulation, penser à tous les paramètres des autoroutes réelles que l'on a été amené à simplifier dans cette étude.

II. Traitement des données expérimentales

1 La requête SQL demandée nécessite de faire une jointure avec la table des stations pour trouver la station voulue.

```
SELECT id_comptage,date,voie,q_exp,v_exp
    FROM COMPTAGES JOIN STATIONS
    ON STATIONS.id_station = COMPTAGES.id_station
    WHERE nom = 'M8B'
```

Notons que la table de provenance de l'attribut `id_station` doit être précisée lors de la jointure puisqu'il porte le même nom dans les deux tables. En revanche, il n'y a pas d'ambiguïté concernant les autres attributs, il n'est donc pas nécessaire de les préciser.

2 La requête demandée nécessite maintenant de rassembler (à l'aide de l'instruction `GROUP BY`) les mesures faites à un même instant sur toutes les voies pour sommer les voitures qui y passent.

```
SELECT date,SUM(q_exp) FROM COMPTAGES_M8B GROUP BY date
```

3 Il s'agit là de calculer le vecteur des concentrations correspondant aux différentes données en effectuant le rapport, à chaque fois, du débit par la vitesse. On peut le faire de manière naturelle en itérant sur les différentes composantes des vecteurs avant de faire le graphique.

> On va ici procéder comme le suggère l'énoncé, c'est-à-dire importer `numpy` et `matplotlib.pyplot` « à la sauvage » par les commandes `from numpy import *` et `from matplotlib.pyplot import *`, mais il s'agit a priori d'un mauvais réflexe en pratique puisque cela pollue l'espace des noms et peut mener à des conflits si les deux modules définissent une fonction de même nom. Cela peut néanmoins se comprendre pour une épreuve écrite où le nombre de fonctions disponibles est réduit et cela permet donc d'appeler `zeros` ou `plot` sans préciser les habituels `np.zeros` ou `plt.plot`.
>
> En outre, on utilise par la suite une autre forme de `zeros` que celle rappelée en annexe, à savoir `zeros(n)` pour créer un vecteur contenant `n` zéros. Le rappel de l'annexe concerne la création de tableaux multidimensionnels pour lesquels il faut spécifier la taille de chaque dimension et qui servirait si on avait à initialiser le tableau `C` des concentrations, utilisé à partir de la question 9, mais l'énoncé ne demande finalement jamais de le faire.

```
from numpy import *                # Imports présupposés par le sujet
from matplotlib.pyplot import *    # (mais mauvaise bonne idée en pratique)

def trace(q_exp,v_exp):
    n = len(v_exp)          # Taille des vecteurs utilisés
    c_exp = zeros(n)        # Initialisation du tableau des concentrations
    for i in range(n):      # pour un calcul séquentiel.
        c_exp[i] = q_exp[i] / v_exp[i]
    plot(c_exp,q_exp,'o')  # Tracé du graphe (Gare à l'ordre des arguments !)
```

Néanmoins, comme l'énoncé signale que les arguments sont des tableaux Numpy, on peut aussi calculer `c_exp` « au vol » en utilisant les facilités de Numpy, qui s'occupe tout seul de la boucle sous-jacente sur toutes les composantes des deux vecteurs. Ainsi, l'écriture de la fonction s'en trouve grandement simplifiée :

```
def trace(q_exp,v_exp):
    c_exp = q_exp / v_exp     # Divisions composante par composante
    plot(c_exp,q_exp,'o')     # Tracé du graphe
```

> Logiquement, une telle solution devrait être acceptée sans sourciller par le correcteur, mais il peut être bon de rappeler dans sa copie que l'on sait que Numpy s'occupe des boucles associées « derrière le rideau ».

4 Il s'agit ici d'un algorithme de **tri par insertion**. On prend un à un chaque élément (de gauche à droite) et on le laisse « couler » dans la partie gauche de la liste (qui est celle qui est triée à ce stade), jusqu'à ce qu'il trouve sa place, c'est-à-dire jusqu'à ce qu'il ne soit plus le plus petit considéré jusqu'ici dans les comparaisons. Pour qu'il fonctionne, il faut « faire de la place », donc décaler chaque élément (depuis la position `j-1`) d'un cran vers la droite (donc vers la position `j` en utilisant l'instruction `v_exp[j] = v_exp[j-1]`) tout en continuant de déplacer l'élément `v` vers la gauche via `j = j-1`. **C'est donc la deuxième proposition qui est la bonne** et la fonction s'écrit totalement :

```
def congestion(v_exp):
    nbmesures = len(v_exp)
    for i in range(nbmesures):          # Pour chaque point de mesure,
        v = v_exp[i]                    # on note la valeur à classer
        j = i                           # et d'où l'on part.
        # Tant qu'on n'arrive pas tout à gauche ou qu'on ne trouve
        while 0<j and v<v_exp[j-1]:     # pas la place de v,
            v_exp[j] = v_exp[j-1]       # on pousse à droite
            j = j-1                     # et on regarde plus à gauche.
        v_exp[j] = v                    # On place finalement v au bon endroit.
    return v_exp[nbmesures//2]          # Renvoi de l'élément au milieu après tri.
```

Dans le meilleur des cas (liste triée), la complexité est linéaire : la boucle `while` ne s'exécute jamais puisqu'on n'itère qu'une seule fois sur tous les éléments. Dans le pire des cas (liste décroissante), chaque boucle `while` s'exécute i fois au i^{e} tour de la boucle `for`, donc $n(n-1)/2$ fois au total, ce qui mène à une complexité quadratique.

Malgré cette dernière éventualité, le choix d'un tri par insertion reste pertinent puisqu'on peut penser que l'on ne veuille guère prendre une médiane sur plus d'une heure de temps (on s'intéresse souvent à l'état quasi-instantané du trafic) donc pour seulement une dizaine de mesures (deux mesures étant séparées de 6 minutes environ), ce qui n'est pas critique en terme de complexité.

5 Une valeur renvoyée de 30 signifie que la circulation à cet endroit était congestionnée puisque la vitesse était inférieure ou égale à 30 km/h pendant la moitié du temps d'observation et que l'énoncé signale que la circulation est considérée congestionnée en dessous d'une vitesse de 40 km/h.

> Il est assez clair que 30 km/h n'est pas tout à fait la vitesse à laquelle on espère progresser sur une autoroute.

Centrale Maths 1 PSI 2017 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Sélim Cornet (ENS Paris-Saclay) ; il a été relu par Bertrand Wiel (professeur agrégé) et Céline Chevalier (enseignant-chercheur à l'université).

L'objectif de ce problème est de démontrer que lors de la répétition d'expériences aléatoires indépendantes, la probabilité que la moyenne des résultats obtenus soit « éloignée » de l'espérance décroît à vitesse exponentielle lorsque le nombre de répétitions de l'expérience augmente. Ce type de résultat porte le nom de théorème de grande déviations.

- Dans la première partie, constituée de trois sous-parties indépendantes, on démontre des résultats préliminaires. On y introduit d'abord la transformée de Laplace d'une variable aléatoire et on établit quelques-unes de ses propriétés. On prouve ensuite une variante de la loi des grands nombres, avant de démontrer un résultat d'analyse appelé le lemme sur-additif.
- Le but de la seconde partie est de démontrer un théorème dû à Harald Cramér. On montre la décroissance géométrique de la suite des probabilités précédemment mentionnée, et on met en œuvre une méthode permettant de déterminer la vitesse de décroissance. Le résultat obtenu est finalement appliqué au calcul de limites de suites numériques.

Ce sujet est d'une difficulté raisonnable et bien guidé. Il requiert toutefois une bonne maîtrise du cours et des techniques classiques de probabilités ; plusieurs questions font également appel à des raisonnements d'analyse. Au sein de chaque partie, les questions sont de difficulté progressive : les premières sont des questions de cours ou qui ne nécessitent qu'un argument simple, tandis que celles situées en fin de chaque partie sont plus techniques et demandent de faire preuve de recul pour choisir les résultats à appliquer.

Indications

Partie I

I.A.1 Poser $P(\lambda) = E((\lambda V + U)^2)$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et étudier le signe de $P(\lambda)$.

I.A.2.b Donner une expression de $E(e^{tX})$ et reconnaître une série géométrique.

I.A.3.a Distinguer deux cas selon le signe de X.

I.A.3.b Appliquer un théorème de croissances comparées. À l'aide des limites obtenues, montrer que la fonction est bornée en dehors d'un certain segment, puis qu'elle est bornée sur ce segment.

I.A.4.c Mettre en œuvre les théorèmes de continuité et de dérivabilité de la somme d'une série de fonctions.

I.A.4.e Étudier le signe de la dérivée de ψ_X. On pourra appliquer l'inégalité de la question I.A.1 à deux variables aléatoires bien choisies.

I.B.2 Utiliser le résultat de la question précédente pour un choix judicieux de δ.

I.C.2 Minorer u_n/n par la somme de u_m/m et d'un terme de limite nulle. On pourra utiliser en particulier l'encadrement du reste donné par le théorème de la division euclidienne.

I.C.3 Utiliser les définitions de la limite et de la borne supérieure.

Partie II

II.A.2.b Commencer par montrer que les variables aléatoires $S_{m+n} - S_m$ et S_m sont indépendantes.

II.A.3 Faire le lien avec la partie I.C.

II.B.1 Appliquer l'inégalité de Markov pour obtenir la seconde inégalité.

II.B.2.a Distinguer deux cas, selon si $X \geqslant a$ ou non.

II.B.2.b Écrire le développement limité de χ à l'ordre 1 en 0.

II.B.2.d Remarquer que, dans les deux cas, la borne inférieure est atteinte à l'intérieur de $I \cap \mathbb{R}_+$, et donc en un point critique.

II.C.1.b Prouver la seconde inégalité à l'aide de la croissance de la fonction ψ_X.

II.C.2.b Montrer d'abord $\eta_a \leqslant \gamma_a + t|b-a|$, puis montrer que le terme $t|b-a|$ peut être rendu arbitrairement petit par un choix judicieux de t et b.

II.C.3 Utiliser le théorème de Cramér démontré à la question précédente.

I. Premiers résultats

I.A.1 Posons, pour $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{P}(\lambda) = \mathrm{E}((\lambda \mathrm{V} + \mathrm{U})^2) = \lambda^2 \mathrm{E}(\mathrm{V}^2) + 2\lambda \mathrm{E}(\mathrm{UV}) + \mathrm{E}(\mathrm{U}^2)$$

avec $\mathrm{E}(\mathrm{V}^2) > 0$ puisque V n'est pas presque sûrement nulle. Ce trinôme de degré 2 étant à valeurs positives, son discriminant est négatif ou nul ; or, celui-ci est donné par $\Delta = 4\mathrm{E}(\mathrm{UV})^2 - 4\mathrm{E}(\mathrm{U}^2)\mathrm{E}(\mathrm{V}^2)$. Ainsi,

$$\boxed{\mathrm{E}(\mathrm{U}^2)\mathrm{E}(\mathrm{V}^2) - \mathrm{E}(\mathrm{UV})^2 \geqslant 0}$$

De plus,

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(\mathrm{U}^2)\mathrm{E}(\mathrm{V}^2) - \mathrm{E}(\mathrm{UV})^2 = 0 &\iff \Delta = 0 \\
&\iff \exists \lambda \in \mathbb{R} \quad \mathrm{P}(\lambda) = 0 \\
&\iff \exists \lambda \in \mathbb{R} \quad \mathrm{E}((\lambda \mathrm{V} + \mathrm{U})^2) = 0 \\
\mathrm{E}(\mathrm{U}^2)\mathrm{E}(\mathrm{V}^2) - \mathrm{E}(\mathrm{UV})^2 = 0 &\iff \exists \lambda \in \mathbb{R} \quad \lambda \mathrm{V} + \mathrm{U} = 0 \text{ p.s.}
\end{aligned}$$

la dernière équivalence provenant du fait qu'une variable aléatoire positive d'espérance nulle est presque sûrement nulle.

> Il y a égalité si, et seulement si, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que la variable aléatoire $\lambda \mathrm{V} + \mathrm{U}$ soit presque sûrement nulle.

Il s'agissait ici d'une question de cours : on a redémontré l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour les variables aléatoires.

I.A.2.a La variable aléatoire X étant bornée, on peut se donner $\mathrm{M} > 0$ tel que pour tout $\omega \in \Omega$, $|\mathrm{X}(\omega)| \leqslant \mathrm{M}$. Soit $\tau \in \mathbb{R}_+^*$. Par croissance de la fonction exponentielle, pour tout $\omega \in \Omega$, $0 \leqslant e^{\tau|\mathrm{X}(\omega)|} \leqslant e^{\tau \mathrm{M}}$, soit $e^{\tau|\mathrm{X}|} \leqslant e^{\tau \mathrm{M}}$. Or cette dernière quantité est constante, d'où

$$\mathrm{E}(e^{\tau \mathrm{M}}) = e^{\tau \mathrm{M}} < +\infty$$

Appliquons alors la propriété $(\mathscr{P})$: $\mathrm{E}(e^{\tau|\mathrm{X}|}) < +\infty$, autrement dit,

> La variable aléatoire X vérifie (C_τ) pour tout $\tau \in \mathbb{R}_+^*$.

I.A.2.b Soit $t \in \mathbb{R}$. Si la variable aléatoire X suit une loi géométrique de paramètre $p \in \,]\,0\,;1\,[$, le théorème de transfert donne

$$\mathrm{E}(e^{t\mathrm{X}}) = \sum_{k=1}^{+\infty} e^{tk} p(1-p)^{k-1} = pe^t \sum_{k=1}^{+\infty} (e^t(1-p))^{k-1}$$

Déterminons les réels t tels que cette série soit convergente. C'est une série géométrique, de raison $e^t(1-p) > 0$. Celle-ci converge donc si, et seulement si, $e^t(1-p) < 1$, autrement dit si $t < -\ln(1-p)$. Dans ce cas-là, calculons la somme de la série en effectuant le changement d'indice $k \leftarrow k-1$:

$$\mathrm{E}(e^{t\mathrm{X}}) = pe^t \sum_{k=0}^{+\infty} (e^t(1-p))^k = \frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}$$

Ainsi,

$$\boxed{\mathrm{E}(e^{t\mathrm{X}}) < +\infty \text{ pour } t \in \,]-\infty\,; -\ln(1-p)\,[\text{ et alors } \mathrm{E}(e^{t\mathrm{X}}) = \frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}.}$$

I.A.2.c Si X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$,

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{E}(e^{t\mathrm{X}}) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{tk} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(e^t\lambda)^k}{k!} = \exp(\lambda(e^t - 1))$$

la série étant convergente pour tout $t \in \mathbb{R}$ puisque c'est une série exponentielle.

$$\boxed{\mathrm{E}(e^{t\mathrm{X}}) < +\infty \text{ pour tout } t \in \mathbb{R} \text{ et alors } \mathrm{E}(e^{t\mathrm{X}}) = \exp(\lambda(e^t - 1)).}$$

I.A.3.a Soient $t \in [\,a\,;b\,]$, $\omega \in \Omega$. Par croissance et positivité de l'exponentielle :

- Si $\mathrm{X}(\omega) \leqslant 0$, on a $e^{t\mathrm{X}(\omega)} \leqslant e^{a\mathrm{X}(\omega)} \leqslant e^{a\mathrm{X}(\omega)} + e^{b\mathrm{X}(\omega)}$.
- De même, si $\mathrm{X}(\omega) \geqslant 0$, il s'ensuit que $e^{t\mathrm{X}(\omega)} \leqslant e^{b\mathrm{X}(\omega)} \leqslant e^{a\mathrm{X}(\omega)} + e^{b\mathrm{X}(\omega)}$.

En résumé, $\boxed{\text{Pour tout } t \in [\,a\,;b\,],\ e^{t\mathrm{X}} \leqslant e^{a\mathrm{X}} + e^{b\mathrm{X}}.}$

La propriété $(\mathscr{P})$ donne alors

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Pour tout } t \in [\,a\,;b\,],\ \mathrm{E}(e^{t\mathrm{X}}) < +\infty. \text{ Par conséquent,}\\ \text{l'ensemble } \{t \in \mathbb{R} \mid \mathrm{E}(e^{t\mathrm{X}}) < +\infty\} \text{ est un intervalle.}\end{array}}$$

I.A.3.b. Écrivons, pour tout $y \in \mathbb{R}$,

$$\theta_{k,t,a,b}(y) = \frac{y^k e^{ty}}{e^{ay} + e^{by}} = \frac{y^k e^{(t-a)y}}{1 + e^{(b-a)y}}$$

Lorsque y tend vers $-\infty$, le numérateur tend vers 0 par croissances comparées (car $t - a > 0$) et le dénominateur tend vers 1 (car $b - a > 0$). On en déduit

$$\boxed{\theta_{k,t,a,b}(y) \xrightarrow[y\to-\infty]{} 0}$$

De même, pour tout $y \in \mathbb{R}$,

$$\theta_{k,t,a,b}(y) = \frac{y^k e^{(t-b)y}}{e^{(a-b)y} + 1}$$

avec $t - b < 0$ et $a - b < 0$. Lorsque y tend vers $+\infty$, le numérateur tend vers 0, le dénominateur vers 1, d'où

$$\boxed{\theta_{k,t,a,b}(y) \xrightarrow[y\to+\infty]{} 0}$$

D'après ce qui précède, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $y < \alpha$ et pour tout $y > \beta$, $|\theta_{k,t,a,b}(y)| \leqslant 1$. Par ailleurs, la fonction $\theta_{k,t,a,b}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$ comme somme, produit et quotient de fonctions usuelles continues sur $\mathbb{R}$, et car son dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Elle est par conséquent aussi bornée sur le segment $[\,\alpha\,;\beta\,]$.

$$\boxed{\text{La fonction } \theta_{k,t,a,b} \text{ est bornée sur } \mathbb{R}.}$$

I.A.3.c La fonction $\theta_{k,t,a,b}$ étant bornée, il existe $\mathrm{M} > 0$ tel que pour tout $y \in \mathbb{R}$, $|\theta_{k,t,a,b}(y)| \leqslant \mathrm{M}$. Il s'ensuit que

$$\left|\frac{\mathrm{X}^k e^{t\mathrm{X}}}{e^{a\mathrm{X}} + e^{b\mathrm{X}}}\right| \leqslant \mathrm{M} \qquad \text{soit encore} \qquad |\mathrm{X}|^k e^{t\mathrm{X}} \leqslant \mathrm{M}(e^{a\mathrm{X}} + e^{b\mathrm{X}})$$

Centrale Maths 2 PSI 2017 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Rémi Pellerin (ENS Lyon) ; il a été relu par Guillaume Batog (professeur en CPGE).

Ce sujet étudie l'évolution de certains systèmes (discrets ou continus) à coefficients périodiques. Notamment, on cherche des conditions nécessaires et/ou suffisantes sur une matrice associée au système pour obtenir des solutions périodiques ou bornées.

- La première partie démontre quelques propriétés des suites complexes périodiques et des normes matricielles.
- La deuxième partie commence par quelques rappels sur les suites récurrentes linéaires d'ordre 2 à coefficients constants avant de s'attaquer au cas où les coefficients sont des suites périodiques. Elle se termine par une traduction matricielle des relations de récurrence et l'introduction d'une matrice dite de Floquet. Sa trace donne des informations sur la périodicité des solutions et leur caractère borné.
- La troisième partie généralise les résultats de la partie précédente au cas des suites vectorielles. On recourt en fin de partie à des critères de diagonalisation avec des polynômes annulateurs.
- La quatrième partie poursuit l'étude dans le cas de systèmes différentiels linéaires. Les raisonnements sont assez similaires à ceux des parties précédentes. Toutefois, cette partie peut être traitée isolément afin de s'entraîner sur les équations différentielles. Il convient de bien comprendre les objets manipulés afin de minimiser le temps passé à faire des calculs.
- La cinquième partie, indépendante du reste, démontre que toute matrice inversible de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ admet une racine p-ième, résultat qui avait été admis dans la partie III. Bien que les questions soient très guidées et comportent des indications, cette partie reste très technique, notamment dans la manipulations des notations et des matrices par blocs.

Globalement, ce sujet est répétitif et n'est pas passionnant à faire d'une seule traite. Cela dit, il constitue un bon sujet de révision sur les suites et les équations différentielles.

Indications

Partie I

I.A.3 Procéder par récurrence.

I.B.1 Revenir à la définition du produit matriciel et majorer la somme.

I.B.2 Idem, revenir à la définition du produit matrice vecteur.

Partie II

II.A.1 C'est du cours. Pour la somme et le produit des racines, écrire

$$(\mathrm{X}-a)(\mathrm{X}-b) = \mathrm{X}^2 - (a+b)\mathrm{X} + ab$$

II.A.5 Remarquer que les racines r_1 et r_2 du polynôme caractéristique sont de module 1. Les écrire sous la forme $r_1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \overline{r_2}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$.

II.B.1 Une suite récurrente linéaire d'ordre 2 sous forme résolue est totalement déterminée par la donnée de ses deux premiers termes.

II.B.3 Penser au déterminant.

II.D.2 Utiliser une récurrence sur k pour la première égalité. Exprimer Z_{kp+r} en fonction de Z_{kp} pour la seconde égalité.

II.E.1 Considérer un vecteur propre comme premier terme de la suite de vecteurs associée.

II.E.2 Quel est le lien entre la trace et les valeurs propres ? Discuter ensuite selon que Q est diagonalisable ou pas. Poser

$$(\mathrm{Z}_k)_{k\in\mathbb{N}} = \Psi^{-1}\left(\mathrm{P}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$$

Vérifier ensuite que la suite $(\|\mathrm{Z}_{kp}\|_\infty)_{k\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée.

II.E.3 Diagonaliser la matrice Q dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et utiliser les majorations établies dans les questions I.B.1 et I.B.2 pour borner les solutions.

Partie III

III.B.2.a Construire une solution $(\mathrm{Y}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ à partir d'un vecteur propre de Φ_p pour la valeur propre ρ.

III.B.2.b Montrer que $\quad \|\mathrm{Y}_k\|_\infty = |\rho|^q \,\|\mathrm{Y}_r\|_\infty \leqslant \mathrm{M}\,|\rho|^q$

où $\quad \mathrm{M} = \mathrm{Max}\,\{\|\mathrm{Y}_r\|_\infty \mid r \in [\![\, 0\,; p-1 \,]\!]\}$

III.E.1 Penser au lien entre multiplicité d'une racine et polynôme dérivé.

III.E.2 Quelle condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice soit diagonalisable fait intervenir les polynômes à racines simples ?

Partie IV

IV.A.1 La matrice E est donnée par ses deux colonnes. Penser le produit matriciel en terme de produit matrice vecteur.

IV.B.1 Penser à l'unicité de la solution à un problème de Cauchy.

IV.B.3 Utiliser la question IV.B.2 avec la fonction $t \mapsto \mathrm{E}(t+\mathrm{T})$.

IV.C.1.b Raisonner par analyse-synthèse.

IV.C.2 S'il existe une solution Y non nulle et T-périodique pour le système (IV.1), montrer que

$$\mathrm{Z} = \begin{pmatrix} y_1(t_0) \\ y_2(t_0) \end{pmatrix}$$

est un vecteur propre de B pour une valeur propre ρ. Réciproquement, montrer que $\rho \in \mathrm{sp}\ \mathrm{B}$ est une condition suffisante.

IV.C.3 Remarquer que toute solution Y de (IV.1) s'écrit sous la forme

$$\forall\, t \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{Y}(t) = \mathrm{e}^{\,\mu_1 t}\mathrm{S}_1(t) + \mathrm{e}^{\,\mu_2 t}\mathrm{S}_2(t)$$

avec $\mathrm{e}^{\,\mu_1 \mathrm{T}}$ et $\mathrm{e}^{\,\mu_2 \mathrm{T}}$ les deux valeurs propres de B comptées avec multiplicité.

IV.D.1 Revenir aux définitions et calculer de manière organisée.

IV.D.2 Résoudre l'équation vérifiée par W.

Partie V

V.A Faire une récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$.

V.B.1 Reconnaître une somme géométrique.

V.B.2 Remarquer que la matrice considérée est triangulaire. Il suffit donc de montrer que ces coefficients diagonaux sont tous non nuls.

V.B.3 Pour l'hérédité, écrire B sous forme d'une matrice par blocs pour se ramener à utiliser $\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(1)$. Choisir judicieusement la racine p-ième du coefficient scalaire $a_{n+1,n+1}$ afin que la condition sur les coefficients diagonaux soit vérifiée.

V.B.4 Toute matrice complexe est trigonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

I. Préliminaire

I.A.1 Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ une suite périodique de période $p \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad z_n \in \{z_0, \ldots, z_{p-1}\}$$

Ainsi, $$\forall n \in \mathbb{N} \qquad |z_n| \leqslant \operatorname{Max}(|z_0|, \ldots, |z_{p-1}|)$$

Ce majorant étant indépendant de n, la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

$$\boxed{\text{Toute suite périodique est bornée.}}$$

I.A.2 Les suites 1-périodiques sont constantes égales à leur premier terme. En effet, si $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est 1-périodique, alors $z_n = z_{n-1} = \cdots = z_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Ainsi,

$$\boxed{\text{Une suite 1-périodique est constante égale à son premier terme.}}$$

I.A.3 Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ une suite p-périodique. Montrons par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ que la propriété suivante est vraie :

$$\mathscr{P}(k) : \quad « \forall n \in \mathbb{N} \quad z_{n+kp} = z_n »$$

- $\underline{\mathscr{P}(0)}$ est clairement vrai.
- $\underline{\mathscr{P}(k) \Longrightarrow \mathscr{P}(k+1)}$: soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}(k)$ vrai. Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} z_{n+(k+1)p} &= z_{n+p+kp} & \\ &= z_{n+p} & \text{d'après } \mathscr{P}(k) \\ z_{n+(k+1)p} &= z_n & \text{par définition de } p\text{-périodique} \end{aligned}$$

  donc $\mathscr{P}(k+1)$ est vrai.
- $\underline{\text{Conclusion}}$: $\mathscr{P}(k)$ est vrai pour tout k dans $\mathbb{N}$.

$$\boxed{\text{Si } (z_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est } p\text{-périodique alors } z_{n+kp} = z_n \text{ pour tous } k \text{ et } n \text{ dans } \mathbb{N}.}$$

> On peut également procéder de façon un petit peu plus astucieuse en remarquant que la suite $(z_{n+kp})_{k\in\mathbb{N}}$ est 1-périodique donc constante égale à son premier terme qui n'est autre que z_n.

I.A.4 Considérons une suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ p-périodique et convergente vers $\ell \in \mathbb{C}$. Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_n = z_0 = \ell$. Soit $n \in \mathbb{N}$. La suite $(z_{n+kp})_{k\in\mathbb{N}}$ est extraite de $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (car $p \geqslant 1$) donc convergente de limite ℓ. D'après la question I.A.3, elle est constante égale à z_n car $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est p-périodique. Par conséquent, par passage à la limite,

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad z_n = \lim_{k\to+\infty} z_{n+kp} = \ell$$

En particulier, $z_0 = \ell$. Ainsi,

$$\boxed{\text{Une suite } p\text{-périodique convergente est constante égale à son premier terme.}}$$

I.B.1 Soient $\mathrm{A} = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $\mathrm{B} = (b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Pour $i, j \in [\![1\,; n]\!]$,

$$(\mathrm{AB})_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

Par inégalité triangulaire, $$\left| (\mathrm{AB})_{i,j} \right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |a_{ik}|\,|b_{kj}|$$