

**CONCOURS ARTS ET MÉTIERS ParisTech - ESTP - POLYTECH****Épreuve de Physique - Modélisation PSI**

Durée 3 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est autorisé.

AVERTISSEMENT

Le candidat devra porter l'ensemble de ses réponses sur le cahier réponses, à l'exclusion de toute autre copie. Les résultats doivent être reportés dans les cadres prévus à cet effet.

Remarques préliminaires importantes :

- Les candidats sont encouragés à lire l'ensemble du sujet et à traiter les questions dans l'ordre.
- Il faudra utiliser exclusivement les notations de l'énoncé.
- Les explications des phénomènes étudiés interviennent dans la notation au même titre que les développements analytiques et les applications numériques (données avec un nombre de chiffres significatifs adapté) ; les résultats exprimés sans unité ne seront pas comptabilisés (S.I. n'est pas une unité mais peut dans le texte référer à une unité du système international qu'il vous convient de déterminer).
- Tout au long de l'énoncé, les paragraphes en italiques ont pour objet d'aider à la compréhension du problème.
- Tout résultat fourni dans l'énoncé peut être admis et utilisé par la suite, même s'il n'a pas été démontré par le(la) candidat(e).
- Les scripts seront rédigés en langage Python.
- On suppose que `numpy`, `odeint` et `pyplot` ont été préalablement importés sous Python :

```
import numpy as np
from scipy.integrate import odeint
from matplotlib import pyplot as plt
```

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction**, la **clarté** et la **précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans l'**appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Tournez la page S.V.P.

Ce problème traite du fonctionnement de différents fusibles. Aucune connaissance particulière sur les fusibles n'est demandée.

En 1753, à Saint-Petersbourg, le professeur Richman et son assistant étudient les premières machines électrostatiques. Le 6 août, ils sont frappés par la foudre alors qu'ils chargent des condensateurs. L'assistant s'en sort pratiquement indemne, tandis que Richman meurt immédiatement : la décharge électrique a traversé son corps. La communauté scientifique est extrêmement choquée. Il apparaît alors clairement la nécessité de protéger les systèmes électriques et les personnes les utilisant.

C'est Edward Nairne qui fait part pour la première fois de l'utilisation de fils métalliques (qui deviendront l'élément de base d'un fusible) comme moyen de protection lors de décharges de condensateurs. La protection d'un système électrique par un fusible fait appel à un principe de fonctionnement très simple. En situation de fonctionnement normal, le fusible assure le passage du courant. Lors de l'apparition d'un défaut électrique, créant un courant anormalement élevé, le fusible permet la coupure automatique du circuit électrique : le fil métallique constituant le fusible fond en raison de l'apport d'énergie anormalement important du fait du défaut électrique.

L'idée de la protection des systèmes électriques par fusibles s'est imposée formellement avec le double développement de l'électrification et de l'industrie. Dès les premières tentatives, la structure de base des fusibles actuels a été définie avec les éléments essentiels :

- deux pièces de connexion permettant de relier le fusible au reste du circuit électrique ;
- un fil métallique dont le métal constitutif est choisi avec un point de fusion à basse température (typiquement du plomb ou de l'étain) ;
- une cavité qui assure un rôle de protection et qui peut contenir un isolant.

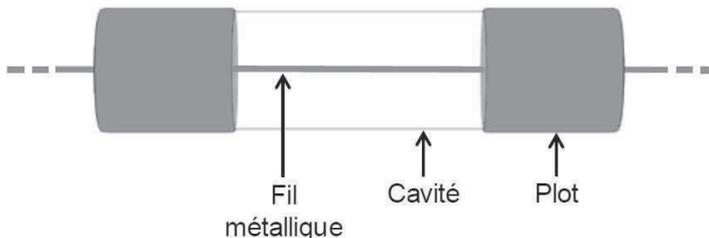


Figure 0 : Schéma de base d'un fusible

Il existe aujourd'hui de nombreux types de fusibles ayant le même principe de fonctionnement et les mêmes éléments de base. On retrouve les fusibles sur les installations domestiques, dans l'industrie (principalement pour l'utilisation avec des charges à fort courant d'appel comme les moteurs) ou pour la protection des semi-conducteurs dans l'ensemble des appareils électroniques.

Données :

- charge élémentaire $e = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{C}$;
- masse de l'électron $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{kg}$;
- constante de Boltzmann $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{J} \cdot \text{K}^{-1}$;
- constante d'Avogadro $N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{mol}^{-1}$.

Données relatives à l'aluminium :

- L'aluminium libère exactement trois électrons de conduction par atome ;
- masse volumique de l'aluminium $\mu_{Al} = 2,6989 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$;
- masse molaire atomique de l'aluminium $M_{Al} = 27,0 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$;
- capacité thermique massique de l'aluminium $c_{Al} = 897 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$;
- enthalpie massique de fusion de l'aluminium $\Delta h_{fus,Al} = 398 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$.

Caractéristiques de différents métaux :

- température de fusion : T_f
- conductivité thermique : λ
- conductivité électrique : σ

	<i>Plomb</i>	<i>Argent</i>	<i>Aluminium</i>
T_f (K)	600,7	1235	933,5
λ ($\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$)	35,3	429	237
σ (unité S.I. « de base »)	$4,81 \cdot 10^6$	$6,30 \cdot 10^7$	$3,77 \cdot 10^7$

On entend par unité S.I. « de base » l'unité non préfixée (exemple : le mètre et pas le centimètre)

Formule mathématique :

- Laplacien en coordonnées cylindriques : $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$

e3a Physique et Modélisation PSI 2017 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Julien Dumont (professeur en CPGE) ; il a été relu par Virgile Andreani (ENS Ulm) et Cyril Ravat (professeur en CPGE).

Ce sujet s'intéresse à différents aspects de la vie et de la mort d'un fusible.

- Dans la première partie, on se concentre sur la conduction électrique dans un fusible, en établissant notamment les propriétés découlant du modèle de Drude.
- Les deuxième et troisième parties abordent la conduction thermique dans un fusible selon deux modèles différents : le premier porte sur la diffusion dans le fusible en tant que système entièrement métallique, le second complète le précédent en prenant en compte les échanges du fil avec l'air qui l'entoure.
- La quatrième partie exploite les précédentes pour étudier des fusibles réels et définir entre autres leurs types.
- Enfin, dans une cinquième partie centrée uniquement sur le programme d'informatique commune, on s'intéresse (par des simulations) à la résolution d'équations thermiques pour un fusible réel possédant des rétrécissements, ce qui permet que sa rupture soit plus rapide. Une annexe est fournie pour préciser les fonctions autorisées.

Ce sujet foisonne de questions et balaie un grand nombre de parties du programme, en s'éloignant peu du cours. Beaucoup de questions sont calculatoires ou qualitatives, notamment dans la quatrième partie. Suffisamment de résultats intermédiaires sont fournis pour que l'on ne reste pas bloqué. C'est un bon exercice d'entraînement pour vérifier que l'on a acquis les principaux réflexes dans les thématiques abordées.

Notons que lors de l'épreuve, les candidats avaient reçu deux énoncés. Le premier est celui qui est reproduit dans ce livre. Le deuxième, qui contenait exactement les mêmes questions, comportait également des cadres dans lesquels les réponses devaient être écrites. C'est ce document qui était ramassé à la fin de l'épreuve. Il s'agissait donc d'une copie normalisée, pratique pour les correcteurs.

INDICATIONS

- A4 Ne pas oublier qu'un atome d'aluminium libère trois électrons de conduction.
- A6 Que peut-on dire de la moyenne des \vec{v}_0 ?
- A7 Intégrer l'équation obtenue en A5 et prendre la moyenne du résultat.
- B2 Il faut effectuer un bilan d'énergie sur un tronçon élémentaire de longueur dx et sur une durée dt . Ne pas oublier la contribution de la résistance du tronçon.
- B6 Le fusible fond dès que le point le plus chaud du fil dépasse la température de fusion du matériau le constituant. Évaluer une quantité dépendant de chaque métal et permettant de les discriminer par rapport aux valeurs fournies.
- C1 Considérer que D revient à envisager n'importe quelle longueur caractéristique du fusible. On peut ainsi en changer si l'interprétation est plus facile.
- C3 Reprendre le bilan effectué à la partie B mais en ajoutant le flux convectif.
- C4 Attention, cette équation est du second ordre !
- C5 Un tracé à la calculatrice suffit, on ne demande qu'une allure.
- D2 Tout comme à la question C3, il faut reprendre le bilan mais en considérant l'état transitoire cette fois-ci et en négligeant les échanges thermiques avec les bornes en cuivre.
- E4 Attention à compter le nombre d'intervalles et à ne pas le confondre avec le nombre de « bornes ».
- E15 Un bon fusible doit à la fois ne pas être trop sensible à l'effet Joule et pouvoir subir une variation nette de la température entraînant la fonte du fil.

A. CONDUCTION DANS LES MÉTAUX

A1 Les équipotentielles sont, d'après l'énoncé, des surfaces planes perpendiculaires à Bx . Ainsi, elles dépendent a priori de la position de cette surface, c'est-à-dire de la coordonnée x . Par ailleurs, en un point quelconque d'une telle surface, le potentiel est supposé constant, hypothèse qui montre que le potentiel ne dépend finalement que de la position du plan équipotentiel.

Le potentiel en un point M du fil ne dépend que de x .

Avec ce résultat et en notant ρ la densité volumique de charges, l'équation de Poisson correspond à

$$\Delta V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} = \frac{d^2V}{dx^2}$$

Le conducteur étant localement neutre, $\rho = 0$; une double intégration fournit alors, à deux constantes α et β près :

$$V(x) = \alpha x + \beta$$

Les conditions $V(0) = V_B$ et $V(L) = V_A$ permettent d'aboutir à

$$V(x) = \frac{V_A - V_B}{L} x + V_B = \frac{U}{L} x + V_B$$

A2 Le champ et le potentiel sont reliés par la relation

$$\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V$$

soit ici

$$\vec{E} = -\frac{V_A - V_B}{L} \vec{e}_x = -\frac{U}{L} \vec{e}_x$$

Le champ est donc uniforme dans le fil métallique et porté par \vec{e}_x .

Notons que les lignes de champ électrique sont perpendiculaires aux équipotentielles, ce qui permet de retrouver que le champ est dirigé parallèlement à l'axe Bx . De plus, ce champ « descend » des potentiels, il est donc orienté en fonction du signe de la différence de potentiel U , depuis l'extrémité de plus fort vers celle de plus faible potentiel, ce que l'on retrouve également dans l'expression précédente.

A3 Dans un récepteur domestique courant, la différence de potentiel imposée est de l'ordre de $U_{\text{secteur}} = 220 \text{ V}$. Si un court-circuit se produit et soumet le fusible à cette tension, celui-ci doit fondre et isoler le récepteur du réseau électrique, ce qui pour une taille de 3 cm proposée par l'énoncé correspond à un champ électrique de l'ordre de $7000 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$. Dans le cadre d'une utilisation normale, on peut imaginer le fusible soumis plutôt à une dizaine de volts, ce qui correspond à la tension de quelques piles.

Pour fixer les idées, certains ordinateurs fonctionnent entre -5 V et $+5 \text{ V}$, ce qui est également l'ordre de grandeur d'un chargeur de téléphone. Les machines nécessitant « réellement » la tension du réseau sont les machines qui chauffent ou qui tournent, comme les fours et les machines à laver. Dernière illustration : les dernières générations de LED lumineuses domestiques courantes se branchent sur le réseau mais un petit transformateur baisse la tension utile à 12 V, qui est suffisante pour les alimenter.

A4 D'après l'énoncé à la page 3, dans les données relatives à l'aluminium, chaque atome libère exactement 3 électrons de conduction. Or, au même endroit, le sujet fournit les masses volumiques et molaires de l'aluminium, ce qui permet de calculer le nombre d'atomes d'aluminium et donc la quantité d'électrons de conduction :

$$n_{\text{Al}} = \frac{3 \mu_{\text{Al}} N_{\text{A}}}{M_{\text{Al}}} = 1,81 \cdot 10^{29} \text{ m}^{-3}$$

A5 Le système constitué de l'électron de masse m_e , dans le référentiel supposé galiléen du laboratoire, est soumis à son poids $m_e \vec{g}$ et à la force électrique $-eE \vec{e}_x$. Le rapport de ces deux forces conduit en valeur absolue et avec les valeurs données dans l'énoncé à

$$\frac{eE}{m_e g} \simeq 10^{11}$$

ce qui justifie de négliger le poids devant la force électrique et de supposer que seule celle-ci agit significativement. Le principe fondamental de la dynamique s'écrit alors de façon simplifiée en

$$m_e \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = -eE \vec{e}_x = \frac{eU}{L} \vec{e}_x$$

ou encore

$$\frac{d\vec{v}(t)}{dt} - \frac{eU}{m_e L} \vec{e}_x = 0$$

L'énoncé ne demande pas explicitement de résoudre cette équation dès à présent ; elle sera résolue un peu plus loin.

A6 La vitesse \vec{v}_0 étant de direction et de norme aléatoires, sa moyenne sur l'ensemble des électrons est nécessairement nulle donc \vec{v}_0 ne contribue pas à la vitesse moyenne des électrons.

A7 On intègre l'équation obtenue à la question A5 en

$$\vec{v}(t) = \frac{eU}{m_e L} t \vec{e}_x + \vec{v}_0$$

En prenant la valeur moyenne et avec le résultat de la question précédente, on obtient

$$\langle \vec{v}(t) \rangle = \left\langle \frac{eU}{m_e L} t \vec{e}_x \right\rangle + \langle \vec{v}_0 \rangle = \frac{eU\tau}{m_e L} \vec{e}_x$$

La moyenne est donc orientée selon l'axe \vec{e}_x et on peut alors conclure que

$$\langle v_x \rangle = \frac{eU\tau}{m_e L}$$

A8 La définition du vecteur densité de courant \vec{j} est

$$\vec{j} = -ne \langle \vec{v} \rangle$$

soit, d'après la question précédente,

$$\vec{j} = -\frac{ne^2 U \tau}{m_e L} \vec{e}_x = \frac{ne^2 \tau}{m_e} \vec{E}$$

e3a Physique et Chimie PSI 2017 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Stéphane Ravier (professeur en CPGE) ; il a été relu par Jérôme Lambert (enseignant-chercheur à l'université), Alexandre Herault (professeur en CPGE) et Tom Morel (professeur en CPGE).

Ce sujet s'intéresse à certains aspects d'un dispositif d'assistance cardiaque et plus généralement à la physico-chimie du cœur.

- Dans la première partie, on se concentre sur l'oscillateur qui est nécessaire pour assurer une mesure fiable et en continu du volume de sang à l'intérieur du cœur. Le circuit proposé utilise deux ALI idéaux en fonctionnement linéaire. Les questions sont très détaillées et ne posent guère de difficultés. Deux petites questions, étayées par des documents, abordent rapidement la modulation d'amplitude mise en œuvre pour la communication de données par le cœur artificiel.
- Le dispositif artificiel présenté n'a pas de pile implantée, il repose sur une alimentation externe. C'est la transmission par induction et la mise en forme du signal électrique qui font l'objet de la deuxième partie. Il faut être au point sur la conversion de puissance pour traiter ces questions.
- La troisième partie étudie les conditions de formation de caillots sanguins. On modélise l'écoulement sanguin par un écoulement de Poiseuille. Après avoir établi la loi de Hagen-Poiseuille, on conclut sur la formation de caillots grâce à un document.
- Dans la quatrième partie, on étudie le cœur d'un point de vue thermodynamique. Après l'étude d'un cycle modèle, on cherche à établir l'efficacité du cœur en utilisant le formalisme des machines dithermes. Cela conduit à développer un modèle de comportement, où les ordres de grandeur sont plus importants que les calculs détaillés.
- Enfin, la cinquième partie s'intéresse à la production d'énergie, nécessaire au fonctionnement du muscle cardiaque, à partir de l'oxydation du glucose présent dans le sang. Ici encore, les thématiques abordées sont variées : structure de la matière, thermodynamique chimique, cinétique et analyse de courbes.

Ce sujet comporte de très nombreuses questions, mais elles se traitent rapidement car elles ne recèlent que très peu de difficultés. Conformément à l'esprit des programmes, il s'appuie sur l'étude de documents. C'est un bon exercice d'entraînement pour vérifier que l'on a acquis les principaux réflexes dans les thématiques abordées.

Notons que lors de l'épreuve, les candidats avaient reçu deux énoncés. Le premier est celui qui est reproduit dans ce livre. Le deuxième, qui contenait exactement les mêmes questions, comportait également des cadres dans lesquels les réponses devaient être écrites. C'est ce document qui était ramassé à la fin de l'épreuve. Il s'agissait donc d'une copie normalisée, pratique pour les correcteurs.

INDICATIONS

Partie I

- A.2 Utiliser l'équivalence $j\omega \longleftrightarrow \frac{d}{dt}$ permettant de passer de l'espace complexe à l'espace réel.
- A.4 Question piège : ce système bien connu est inconditionnellement stable comme le prouve par exemple le critère de Routh.
- A.5 Traduire l'égalité de l'intensité du courant traversant la résistance et le condensateur. Utiliser le fonctionnement linéaire de l'ALI.
- A.6 Erreur d'énoncé : les bornes + et - de l'ALI sont inversées sur la figure 5.
- B.2 Si f_0 désigne la fréquence de la porteuse et f celle du signal modulant, les trois pics correspondent à f_0 et $f_0 \pm f$.

Partie II

- C.2 Supposer que la section du tore est uniforme. Grâce à la conservation du flux du champ magnétique, justifier que le champ magnétique est uniforme. Appliquer le théorème d'Ampère et utiliser la modélisation linéaire du matériau ferromagnétique utilisé. Simplifier l'expression obtenue en tenant compte de $\mu_r \gg 1$.
- C.3 Traduire la loi des mailles au primaire et au secondaire.
- D.2 Supposer les diodes idéales et sans seuil. Tracer la tension aux bornes de la source idéale de courant équivalente à la charge.

Partie III

- E.1 Négliger la pesanteur.
- E.3 Intégrer le théorème de la résultante cinétique en utilisant la condition d'adhérence du fluide aux parois.
- E.5 La loi de Hagen-Poiseuille est une relation qui relie le débit volumique Q de l'écoulement à la différence de pression $\Delta P = P_1 - P_2$ entre la sortie et l'entrée de la conduite.
- E.6 La résistance hydraulique est définie par analogie avec la résistance électrique : $R_H = \Delta P/Q$.

Partie IV

- G.1 L'efficacité du cœur peut être définie comme pour une machine thermique comme le rapport de la grandeur utile sur la grandeur coûteuse. L'énergie coûteuse peut être prise égale à l'apport énergétique de l'alimentation, soit environ 2000 kcal pour une personne sédentaire.

Partie V

- J.2 Appliquer la loi de Hess.
- K.1 L'élément du glucose qui est oxydé est le carbone. Déterminer son nombre d'oxydation dans le glucose et dans le dioxyde de carbone.
- K.2 $\Delta_r S^\circ$ est défini à partir des entropies molaires standard.
- K.5 Utiliser la loi de Van't Hoff.
- L.5 Déterminer graphiquement la pente de la tangente à l'origine ainsi que l'équation de l'asymptote horizontale. Utiliser ensuite les expressions approchées établies à la question L.4.

I. ÉTUDE D'ÉLÉMENTS ÉLECTRONIQUES DU DISPOSITIF

A.1 Par application de la relation du diviseur de tension, on peut écrire

$$\underline{V}_2 = \frac{1/jC_2\omega}{R_2 + 1/jC_2\omega} \underline{V}_{S1}$$

$$\underline{H}_1 = \frac{\underline{V}_2}{\underline{V}_{S1}} = \frac{1}{1 + jR_2C_2\omega}$$

Notons que ce filtre est d'ordre 1. Effectuons une analyse asymptotique :

- en hautes fréquences, $\omega \rightarrow \infty$, soit $R_2C_2\omega \gg 1$,

$$\underline{H}_1 \sim \frac{1}{jR_2C_2\omega} \quad \text{et} \quad \|\underline{H}_1\| \xrightarrow{\omega \rightarrow \infty} 0$$

- en basses fréquences, $\omega \rightarrow 0$, soit $R_2C_2\omega \ll 1$,

$$\underline{H}_1 \sim 1$$

Par conséquent, ce filtre coupe les hautes fréquences mais laisse passer les basses fréquences : c'est un **filtre passe-bas d'ordre 1**.

A.2 La fonction de transfert permet d'écrire, en complexes,

$$\underline{V}_2 = \underline{H}_1 \underline{V}_{S1}$$

soit

$$(1 + jR_2C_2\omega) \underline{V}_2 = \underline{V}_{S1}$$

Grâce à l'équivalence

$$j\omega \longleftrightarrow \frac{d}{dt}$$

entre les espaces complexe et réel, on déduit

$$R_2C_2 \frac{dV_2}{dt} + V_2 = V_{S1}$$

A.3 La solution de cette équation différentielle linéaire d'ordre 1 à second membre sinusoïdal est la somme de la solution générale de l'équation sans second membre correspondant et d'une solution particulière de l'équation complète, soit

$$V_2(t) = Ae^{-t/R_2C_2} + B \cos(\omega t + \varphi)$$

où A, B et φ sont des constantes.

A, B et φ n'ont pas le même « statut » et il est abusif de les nommer collectivement « constantes d'intégration ». Seule A est une constante d'intégration (qui dépend des conditions initiales) alors que B et φ peuvent être déterminées à partir de \underline{H}_1 . L'énoncé ne semble pas demander que l'on exprime précisément B et φ puisqu'il demande seulement de « donner la forme ». Précisons tout de même :

$$A = \|\underline{H}_1(\omega)\| V_{S10} \quad \text{et} \quad B = \arg(\underline{H}_1(\omega))$$

A.4 D'après le critère de Routh pour un système linéaire d'ordre 1, ce système est stable si tous les coefficients de l'équation différentielle sont de même signe, ce qui est bien le cas ici puisque $R_2C_2 > 0$: **le système est inconditionnellement stable**.

A.5 L'ALI étant idéal, aucun courant ne pénètre par ses entrées. Égalons d'une part l'intensité du courant traversant la résistance R_1 et le condensateur C_1 :

$$\frac{\underline{V}_{S2} - \underline{V}_-}{R_1} = jC_1\omega (\underline{V}_- - \underline{V}_{S1})$$

D'autre part, l'ALI étant en fonctionnement linéaire,

$$\underline{V}_+ = \underline{V}_-$$

Or,

$$\underline{V}_+ = \underline{V}_1$$

donc

$$\underline{V}_{S2} - \underline{V}_1 = jR_1C_1\omega (\underline{V}_1 - \underline{V}_{S1})$$

A.6 Si $\underline{V}_1 = 0$, la relation précédente se simplifie en

$$\underline{V}_{S2} = -jR_1C_1\omega \underline{V}_{S1} \quad \text{ou} \quad \underline{V}_{S2} = -R_1C_1 \frac{d\underline{V}_{S1}}{dt}$$

On reconnaît la **fonction intégrateur simple**.

Attention aux notations : \underline{V}_{S1} est la sortie, \underline{V}_{S2} l'entrée. Le montage intégrateur étant très classique, cela ne doit pas être une source de difficultés.

A.7 Le montage est exactement le même que celui de la figure 4, seules les noms des grandeurs changent, par conséquent,

$$\underline{V}_1 - \underline{V}_2 = jR_3C_3\omega (\underline{V}_2 - \underline{V}_{S2})$$

La figure 5 présente une coquille : les bornes de l'ALI ont été malencontreusement inversées. En effet, l'ALI2 ne serait pas rétroactionné sur son entrée inverseuse dans cette configuration, ce qui interdirait un fonctionnement linéaire.

Rappelons que la présence d'une rétroaction négative est nécessaire pour avoir un fonctionnement linéaire et que la présence d'une rétroaction négative passive sans rétroaction positive est une condition suffisante de fonctionnement linéaire. Il n'existe cependant pas de condition nécessaire et suffisante générale qui assurerait un fonctionnement linéaire.

A.8 La relation (1) de l'énoncé se réécrit, en séparant parties réelle et imaginaire :

$$1 - a_1a_3\omega^2 + ja_3\omega (1 - a_1a_2\omega^2) = 0$$

Par unicité de la décomposition d'un complexe en la somme de ses parties réelle et imaginaire, on en déduit que

$$a_1a_3\omega^2 = 1 \quad \text{et} \quad a_1a_2\omega^2 = 1$$

d'où

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{a_1a_3}} = \frac{1}{\sqrt{a_1a_2}}$$

Numériquement,

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi R_1C_1} = 19,9 \text{ kHz}$$

On trouve bien la fréquence désirée, soit 20 kHz.

CCP Physique et Chimie PSI 2017 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Alexandre Herault (professeur en CPGE) et Jérôme Lambert (enseignant-chercheur à l'université); il a été relu par Jimmy Roussel (professeur agrégé en école d'ingénieur), Augustin Long (ENS Lyon) et Stéphane Ravier (professeur en CPGE).

Ce problème s'intéresse à différents aspects d'un actionneur électromagnétique.

- La première partie aborde le principe d'un actionneur électromécanique linéaire synchrone : on étudie la production d'une onde de champ magnétique et la force qu'elle exerce sur un cadre mobile.
- La deuxième partie est consacrée à la description du pilotage de ce dispositif, puis à son optimisation afin d'en minimiser les vibrations.
- Dans la troisième partie, on étudie la soudure de la connectique, qui est composée d'un alliage de bismuth et d'étain. On s'intéresse au diagramme de phases liquide/solide de ce mélange binaire, ainsi qu'à l'oxydation de la soudure en présence d'eau. Puis on aborde les mécanismes de refroidissement d'un point de soudure obtenu avec cet alliage afin d'optimiser la rapidité de solidification.
- La quatrième partie, très courte, permet de s'intéresser à un aspect du fonctionnement d'un capteur optique de position à travers l'étude de la stabilité de la longueur d'onde du laser utilisé dans ce dispositif.

La première partie présente quelques difficultés en raison de la manière expéditive dont est déterminé le champ magnétique. En outre, des ambiguïtés de notation peuvent déconcerter dans les deux premières parties où B et I désignent tour à tour des champs et des courants différents. Les deux dernières parties sont indépendantes. Ce problème est fidèle au programme et à l'esprit de la filière PSI. Il donne l'occasion d'une révision tous azimuts.

INDICATIONS

Partie I

- 6 Quelle hypothèse implicite fait l'énoncé sur le champ magnétique entre deux fils en demandant de ne considérer qu'une ligne de champ moyenne ?
- 7 Appliquer le principe de superposition.
- 11 Si la force est modulée dans le temps, que peut-on dire de sa valeur moyenne ? La lecture de la suite de l'énoncé rappelle la condition à respecter.

Partie II

- 13 De quelle fraction de période le courant $i_2(t)$ est-il décalé par rapport à $i_1(t)$?
- 14 Ne pas oublier de prendre en compte la composante temporelle due au déplacement de la partie mobile dans l'expression de $F(t)$.
- 15 Le développement en série de Fourier de $u_1(t)$ donné suggère qu'il est possible d'annuler son harmonique la plus basse pour une valeur particulière de α .

Partie III

- 17 Écrire la définition de la fraction molaire, puis faire apparaître les masses des deux constituants.
- 18 La traversée de l'horizontale donne toujours lieu à un palier de température.
- 19 Les températures de fusion des corps purs sont lues sur le diagramme. Pour quelle composition de l'alliage est-il le plus facile de réaliser la fusion pour souder ?
- 20 Lire graphiquement la composition du liquide puis appliquer le théorème des moments chimiques pour trouver les masses des deux phases.
- 21 Comparer les températures de fusion des deux alliages.
- 22 Penser au palier de diffusion pour la réduction des ions métalliques.
- 23 L'étain est plus réducteur que l'argent.
- 24 Le fer est encore plus réducteur et peut être oxydé par l'eau. De plus les oxydes de fer sont poreux et permettent à l'eau de s'infiltrer en profondeur.
- 25 Que peut-on dire de la température T_1 durant la phase de solidification ? La capacité thermique massique doit-elle être prise en compte en l'absence de variation de température ?
- 26 La surface du point de soudure étant 50 fois plus grande que sa surface de contact avec les conducteurs cylindriques, on peut assimiler la surface d'échange conducto-convectif à celle de la sphère.

Partie IV

- 30 Comparer la variation relative de fréquence induite par l'élévation de température du laser avec la variation relative de fréquence entre deux modes successifs.

ÉTUDE D'UN ACTIONNEUR ÉLECTROMÉCANIQUE

I. PRINCIPE DE L'ACTIONNEUR ÉLECTROMÉCANIQUE LINÉAIRE SYNCHRONE

1 La perméabilité μ_0 s'exprime en H.m^{-1} .

En cas d'oubli, on peut repartir des relations liant la norme du champ magnétique B au courant i dans un solénoïde infini d'une part, et le flux magnétique au courant d'autre part :

$$B = \mu_0 n i \quad \text{et} \quad \phi = BS = Li$$

où n est un nombre de spires par unité de longueur (en m^{-1}), S une surface (en m^2) et L une inductance (en H). En combinant ces relations, il vient

$$[\mu_0] = \frac{[L]}{[n][S]} = \text{H.m}^{-1}$$

La perméabilité relative μ_r caractérisant un matériau est sans dimension et n'a donc **pas d'unité**. Dans le cas du fer doux, un ordre de grandeur de μ_r est

$$\mu_r \approx 1000$$

2 Le dispositif représenté sur la figure 2 est invariant par translation suivant l'axe z , ce qui implique que les composantes des grandeurs sont indépendantes de z .

$$\vec{B} \text{ et } \vec{H} \text{ ne dépendent que de } x \text{ et de } y.$$

Pour compléter l'analyse des invariances par translation, on peut d'ores et déjà remarquer que, du fait de la périodicité du dispositif, \vec{B} et \vec{H} sont des fonctions périodiques selon x de période $2L$.

3 Dans l'approximation des régimes quasi-stationnaires, l'équation de Maxwell-Ampère dans un milieu magnétique s'écrit

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j}$$

Appliquons le théorème d'Ampère au contour \mathcal{C} tracé sur la figure ci-contre :

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = I$$

où I est le courant traversant le fil enlacé par \mathcal{C} . Les champs H_{air} et H_{fer} étant uniformes dans les deux milieux, la circulation de l'excitation magnétique devient

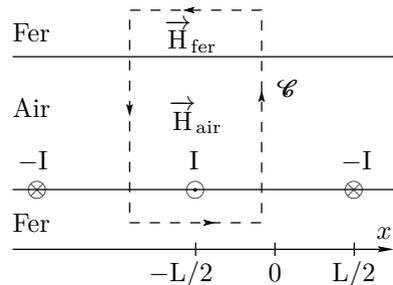
$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = 2e H_{\text{air}} + \ell_{\text{fer}} H_{\text{fer}}$$

soit

$$2e H_{\text{air}} + \ell_{\text{fer}} H_{\text{fer}} = I$$

4 La conservation du flux de \vec{B} permet d'affirmer l'égalité du champ magnétique dans le fer et dans l'air. Elle découle de l'équation de Maxwell-flux :

$$\text{div } \vec{B} = 0$$



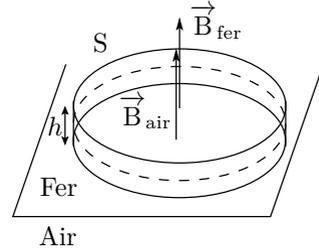
Redémontrons ce résultat. Pour cela, partons de la forme intégrale de l'équation de Maxwell-flux. Pour toute surface fermée Σ ,

$$\oint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

Appliquons cette relation à la surface représentée ci-contre, où le contour en pointillés représente l'intersection du cylindre avec l'interface Fer/Air. Le flux de \vec{B} se décompose en la somme du flux à travers les parois latérales et du flux à travers les bases du cylindre. Il est possible de rendre le flux latéral arbitrairement petit en faisant tendre h vers 0, si bien que le flux de \vec{B} se réduit à

$$\oint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{S} = S(B_{\text{fer}} - B_{\text{air}}) = 0$$

Il en résulte que $B_{\text{fer}} = B_{\text{air}} = B$.



5 Dans un milieu linéaire, homogène et isotrope, la relation liant l'excitation magnétique au champ magnétique est $H = B/\mu_0\mu_r$, qui conduit ici à

$$H_{\text{air}} = \frac{B}{\mu_0} \quad \text{et} \quad H_{\text{fer}} = \frac{B}{\mu_r\mu_0}$$

Injectons ces expressions dans la relation obtenue à la question 3. Il vient

$$2e \frac{B}{\mu_0} + \ell_{\text{fer}} \frac{B}{\mu_r\mu_0} = I$$

qu'on réécrit

$$2e \frac{B}{\mu_0} \left(1 + \frac{\ell_{\text{fer}}}{2e\mu_r} \right) = I$$

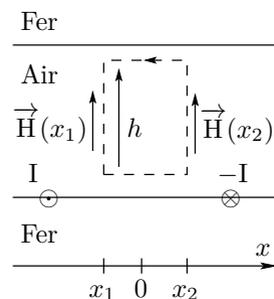
Comme $e \gg \ell_{\text{fer}}/\mu_r$, on peut négliger le deuxième terme entre parenthèses. Dès lors,

$$B = \frac{\mu_0 I}{2e}$$

Dans un moteur, c'est l'énergie magnétique (proportionnelle au carré du champ magnétique) qui est à la source de la force qui engendre le déplacement. Il faut donc que le champ magnétique soit le plus fort possible. Par conséquent, **l'entrefer doit être le plus réduit possible**.

6 Dans l'entrefer, \vec{B} n'est fonction que de x et est parallèle à \vec{e}_y . Le contour de hauteur h représenté en pointillé sur la figure ci-contre n'est traversé par aucun courant. La circulation de \vec{H} est donc nulle le long de ce contour. En outre les plans $x = x_1$ et $x = x_2$ sont compris entre les mêmes fils, si bien que l'excitation magnétique doit avoir la même direction dans ces deux plans. Le théorème d'Ampère s'écrit

$$h(H(x_1) - H(x_2)) = 0$$



CCP Modélisation et Ingénierie numérique PSI 2017

Corrigé

Ce corrigé est proposé par Tom Morel (professeur en CPGE) ; il a été relu par Olivier Frantz (professeur agrégé en école d'ingénieur) et Julien Dumont (professeur en CPGE).

Ce sujet porte sur les propriétés d'une machine frigorifique et sa modélisation. Il est constitué de quatre parties indépendantes.

- La première partie est consacrée aux propriétés thermodynamiques de la machine. Après un rappel de notions proches du cours, le sujet étudie le cycle dans le diagramme (P, h) , dit « diagramme des frigoristes ».
- La modélisation du système proprement dit est étudiée dans la deuxième partie. On s'intéresse tout d'abord à la simplification du modèle à partir de données expérimentales. Cette partie repose essentiellement sur des notions du cours de sciences de l'ingénieur.
- La troisième partie concerne l'existence d'un pic de courant au démarrage du moteur ainsi que le facteur de puissance. On détermine les caractéristiques électriques du moteur puis on évalue le facteur de puissance du système à partir de données expérimentales.
- Enfin, la dernière partie traite de la commande de la variation en température. On utilise des notions de FTBO et d'informatique ainsi que la lecture de quelques programmes Python ou Scilab.

Le sujet, de longueur raisonnable, est équilibré entre modélisation et sciences physiques. Il permet une bonne révision des chapitres abordés.

INDICATIONS

Partie I

- 5 Utiliser la conservation du débit massique en régime permanent.
- 7 Déterminer l'ordre de grandeur de la taille d'une machine frigorifique.
- 11 Supposer la transformation isenthalpique et lire sur le diagramme (P, h) la différence de pression sur la transformation étudiée.
- 12 L'enthalpie est une fonction d'état. On peut donc décomposer la transformation en deux étapes.
- 13 La chaleur latente correspond à la différence d'enthalpie entre les deux points extrêmes d'une isotherme sous la courbe de saturation.
- 18 L'entropie échangée est nulle pour cette transformation. D'après le deuxième principe, on a alors

$$\Delta s = s_{\text{créée}} \geq 0$$

Partie II

- 23 Comparer l'amplitude du mouvement selon \vec{z} aux amplitudes selon \vec{x} et \vec{y} .
- 24 En parallèle, les constantes de raideur s'additionnent.

Partie III

- 32 Déterminer la valeur de E à partir de la tension en régime permanent.
- 35 Vérifier la validité de l'ARQS.
- 37 Calculer l'intensité en utilisant le coefficient $0,1 \text{ V.A}^{-1}$. Par ailleurs, le déphasage $\Delta\varphi$ s'écrit

$$\Delta\varphi = 2\pi \frac{\Delta t}{T}$$

où Δt est l'écart temporel entre les deux signaux.

- 38 L'incertitude sur $\cos(\Delta\varphi)$ donne

$$\Delta(\cos(\Delta\varphi)) = \frac{\cos(\Delta\varphi)_{\max} - \cos(\Delta\varphi)_{\min}}{\sqrt{3}}$$

Partie IV

- 40 Il s'agit d'une FTBO de classe 1.
- 42 L'argument de la fonction complexe est

$$\varphi = -T\omega - \frac{\pi}{2}$$

- 46 Pour $t = \tau = 10 \text{ s}$, ce système d'ordre 1 a atteint 63% de sa valeur finale.

MODÉLISATION D'UNE MACHINE FRIGORIFIQUE

I. MODÉLISATION DU CYCLE FRIGORIFIQUE

1 Le système considéré est constitué par le fluide. Ainsi, d'après les informations sur le cycle :

- La transformation $1 \rightarrow 2$ est une compression du fluide. Le compresseur fournit de l'énergie sous forme de travail à celui-ci. Par conséquent,

$$w_{12} > 0$$

- La transformation $2 \rightarrow 3$ correspond à l'échange thermique avec la source chaude. Or, le fluide réchauffe la source chaude donc lui cède de l'énergie, soit

$$q_{23} < 0$$

- Lors de la transformation $4 \rightarrow 1$, la source froide cède un transfert thermique au fluide, c'est-à-dire que

$$q_{41} > 0$$

2 Il n'y a pas de travail lors des transformations $2 \rightarrow 3$ et $4 \rightarrow 1$. L'échange thermique se fait donc dans le sens naturel. Lorsqu'un corps chaud est en contact avec un corps froid, le corps chaud se refroidit et le corps froid se réchauffe. Or, dans le condenseur, le fluide réchauffe la source chaude donc

$$T_{\text{fluide}} > T_{\text{chaud}}$$

De même, dans l'évaporateur, la source froide se refroidit. Par conséquent,

$$T_{\text{fluide}} < T_{\text{froid}}$$

3 Dans un réfrigérateur, l'intérieur doit se refroidir donc

La source froide est l'intérieur du réfrigérateur et la source chaude l'air ambiant de la maison.

4 Notons v la vitesse d'écoulement et S la section. La vitesse étant uniforme, le débit massique D_m s'écrit

$$D_m = \mu S v$$

5 En régime permanent, le débit massique se conserve. Or, la section des canalisations est constante. D'après la question 4, on a

$$\mu v = C^{\text{te}}$$

Avant la compression, la masse volumique est minimale. Par conséquent,

La vitesse du fluide est maximale juste avant compression.

6 D'après le diagramme (P, h) , on lit approximativement $h_1 = 390 \text{ kJ.kg}^{-1}$ et $h_2 = 440 \text{ kJ.kg}^{-1}$, soit Δh_{12} de l'ordre de 50 kJ.kg^{-1} . Or, l'énergie cinétique massique maximale e_c vaut

$$e_c = \frac{1}{2} v_{\text{max}}^2 = 0,5 \text{ J.kg}^{-1} \ll \Delta h_{12}$$

Les variations d'énergie cinétique sont négligeables devant celles d'enthalpie.

On peut donc retirer le terme « cinétique » de l'expression du premier principe.

7 La taille d'une machine frigorifique est de l'ordre de $z = 1$ m. L'énergie massique de pesanteur gz est de l'ordre de 10 J.kg^{-1} . On constate que cette énergie est aussi négligeable devant la variation d'enthalpie. Ainsi,

Les variations d'énergie de pesanteur sont négligeables devant celles d'enthalpie.

On peut donc retirer le terme de « pesanteur » de l'expression du premier principe.

8 Le point 1 se situe sur l'isotherme $T_1 = -20^\circ\text{C}$. La température de la vapeur saturante correspond à la température du palier qui se situe dans la courbe de saturation. On lit $T_{\text{sat}}(P_{\text{bp}}) = -30^\circ\text{C}$. Il vient

$$T_1 - T_{\text{sat}}(P_{\text{bp}}) = 10^\circ\text{C}$$

9 Reprenons le raisonnement précédent. À l'état 3, $T_3 = 30^\circ\text{C}$ et le palier est à la température $T_{\text{sat}}(P_{\text{hp}}) = 40^\circ\text{C}$. Par conséquent,

$$T_3 - T_{\text{sat}}(P_{\text{hp}}) = -10^\circ\text{C}$$

10 Les parois sont calorifugées donc $q_{34} = 0$. En outre, il n'y a pas de pièce mobile donc $w_{34} = 0$. D'après le premier principe établi à la question 7,

$$\Delta h_{34} = 0$$

Cette étape est donc bien isenthalpique.

11 Lors d'une transformation isenthalpique, $\Delta h = 0$. Du point 3 jusqu'à la courbe de saturation, la masse volumique du liquide μ_{liq} ne varie pas. On obtient alors

$$\Delta \left(\frac{P}{\mu_{\text{liq}}} \right) = \frac{\Delta P}{\mu_{\text{liq}}}$$

Comme $h = u + P/\mu$ et $\Delta h = 0$, il vient

$$\Delta u = c_v \Delta T = - \frac{\Delta P}{\mu_{\text{liq}}}$$

D'après le diagramme (P, h) , $\Delta P \simeq -2 \text{ bar}$ et $\mu_{\text{liq}} = 1,3 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$. Finalement,

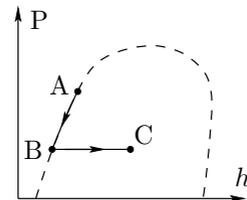
$$\Delta T = - \frac{\Delta P}{c_v \mu_{\text{liq}}} = 0,2 \text{ K}$$

Cette variation de température est bien négligeable devant celle de la transformation $3 \rightarrow 4$ qui est de l'ordre de 60 K .

Une isenthalpique est bien assimilable à une isotherme.

12 Décomposons la transformation en deux étapes (voir le schéma ci-contre) :

- De A à B, la température du liquide varie de T_3 à T_4 . Sa variation d'enthalpie vaut donc $\Delta h_{AB} = c_P(T_4 - T_3)$;
- De B à C, une fraction massique Δx_{vap} de liquide se vaporise à la température T_4 . Or, L_{vap} correspond à l'énergie massique de vaporisation. La variation d'enthalpie est $\Delta h_{BC} = \Delta x_{\text{vap}} L_{\text{vap}}(T_4)$.



L'enthalpie est une fonction d'état donc sa variation lors de cette transformation correspond à la somme des deux variations précédentes. Ainsi,

$$\Delta h_{\text{vap}} = \Delta x_{\text{vap}} L_{\text{vap}}(T_4) + c_P(T_4 - T_3)$$

Centrale Physique et Chimie 1 PSI 2017 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Jimmy Roussel (professeur agrégé en école d'ingénieur) ; il a été relu par Stéphane Ravier (professeur en CPGE) et Louis Salkin (professeur en CPGE).

Le sujet aborde le traitement des fumées industrielles à l'aide de dispositifs électrostatiques appelés électrofiltres. Le principe consiste à envoyer la fumée à traiter dans une zone où règne un champ électrique suffisamment important pour ioniser l'air. Le courant ionique qui en découle bombarde les poussières, qui s'agglutinent alors sur l'électrode collectrice. Cette étude s'articule en quatre parties largement indépendantes :

- La première partie étudie deux types de dispositifs, qui diffèrent par leur géométrie : l'électrofiltre sec et l'électrofiltre humide. On cherche à déterminer quelle tension permet de déclencher l'ionisation de l'air. Ensuite, on analyse l'influence de l'ionisation sur la distribution du champ électrique.
- La deuxième partie s'intéresse à l'interaction entre ce courant anionique et les grains de poussière. On montre que les poussières acquièrent rapidement une charge et une vitesse limites, ce qui permet d'estimer le rendement du dispositif.
- La commande électrique de l'électrofiltre fait l'objet d'une troisième partie. Les étages de régulation, de transformation en haute tension et de redressement sont analysés.
- Enfin, la dernière partie aborde quelques aspects chimiques. On explique notamment pourquoi l'ajout de trioxyde de soufre aux fumées diminue la résistivité des particules solides en milieu humide et améliore les performances du dispositif.

En physique, cette épreuve a le mérite de couvrir différents aspects du programme de seconde année ; l'électromagnétisme, la mécanique des fluides, la conversion de puissance ainsi que les bilans sont abordés. Quant à la chimie, il s'agit d'une petite partie portant sur le programme de première année. Même si de nombreuses questions sont guidées, on peut noter une volonté de la part des concepteurs de valoriser l'autonomie. La question II.B en est une illustration.

INDICATIONS

Partie I

- I.A.3.a Vérifier que $V = 0$ au voisinage des collectrices, puis imposer la condition aux limites $V = -U$ au voisinage de l'émettrice.
- I.B.1 Le sens du courant électrique est donné par le sens de \vec{j} .
- I.B.2 Calculer le flux de \vec{j} à travers un cylindre compris entre les électrodes et de même axe.
- I.B.4 Poser $y = rE$ puis intégrer.

Partie II

- II.A.1.b Les lignes de champ sortent si $\vec{E}_t \cdot \vec{u}_r > 0$.
- II.A.1.c $Q = Q_{\text{lim}}$ quand $\vec{E}_t \cdot \vec{u}_r > 0$ n'a plus de solution.
- II.A.2.c Comparer la durée de transit avec t_{90} .
- II.B Utiliser la relation fondamentale de la dynamique en introduisant une force de traînée de norme
- $$f = \frac{1}{2} \rho_a S C_x w^2 \quad \text{avec} \quad C_x = 24/\text{Re}$$
- II.C.2.d Déterminer la fonction $c(x)$ puis calculer le rendement η , appelé aussi efficacité.

Partie III

- III.A.2 L'énoncé n'est pas forcément très clair. Il faut lire que K_1 est ouvert lorsque $v_L > v_P$, soit de $t = 0$ à αT . À partir de $t = \alpha T$, il est fermé brièvement.
- III.B.2 Lorsque le transformateur est court-circuité, la tension v_P se confond avec la tension aux bornes de la bobine de protection.
- III.B.3 Tant que le secondaire est court-circuité, on a la relation $V_P/I_P = C^{\text{te}}$.

Partie IV

- IV.B.1 Considérer qu'un acide est fort si son pKa est inférieur à 2.

TRAITEMENT DES FUMÉES INDUSTRIELLES PAR UN ÉLECTROFILTRE

I. CHAMP ÉLECTRIQUE DANS UN ÉLECTROFILTRE

I.A.1 En régime statique, le potentiel électrique obéit à l'équation de Poisson

$$\Delta V + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$$

où ρ désigne la densité volumique de charge. Dans l'espace inter-électrodes vide de charge, on a $\rho = 0$, ce qui conduit à l'équation de Laplace

$$\Delta V = 0 \tag{1}$$

I.A.2.a Vu la symétrie de révolution que présente l'électrofiltre tubulaire, il est judicieux d'adopter **un système de coordonnées cylindriques** (r, θ, z) , dont l'axe coïncide avec celui de l'émettrice.

L'invariance par rotation et par translation suivant \vec{u}_z (absence d'effet de bord) implique que le potentiel ne dépend ni de θ , ni de z . L'équation (1) devient

$$\Delta V(r) = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dV}{dr} \right) = 0$$

Après une double intégration, on trouve

$$V(r) = C_1 \ln r + C_2$$

où C_1 et C_2 sont deux constantes d'intégration que l'on détermine à l'aide des conditions aux limites suivantes : $V(r_c) = 0$ et $V(r_e) = -U$. On a donc

$$\begin{cases} C_1 \ln r_c + C_2 = 0 \\ C_1 \ln r_e + C_2 = -U \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} C_1 = \frac{U}{\ln(r_c/r_e)} \\ C_2 = -C_1 \ln r_c \end{cases}$$

Finalement,

$$V(r) = U \frac{\ln(r/r_c)}{\ln(r_c/r_e)}$$

I.A.2.b Le champ électrostatique dérive du potentiel via la relation

$$\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V(r) = \frac{-U}{\ln(r_c/r_e)} \frac{\vec{u}_r}{r}$$

Le champ électrique est radial centripète, dirigé vers les valeurs décroissantes du potentiel comme l'impose sa définition.

Son intensité atteint un maximum au contact de l'émettrice, ce qui explique que l'ionisation ait lieu à son voisinage. La valeur maximale du champ électrique vaut donc

$$|E|_{\text{max}} = \frac{U}{r_e \ln(r_c/r_e)}$$

L'ionisation se produit dès que ce champ dépasse le champ disruptif E_0 , ce qui correspond à une tension seuil

$$U_0 = E_0 r_e \ln \left(\frac{r_c}{r_e} \right)$$

I.A.2.c Numériquement,

$$U_0 = 4,4 \cdot 10^6 \times 1,25 \cdot 10^{-3} \times \ln \left(\frac{150}{1,25} \right) = 26 \text{ kV}$$

I.A.3.a Calculons le potentiel des collectrices définies par les plans $y = \pm s$:

$$\begin{aligned} V(x, \pm s, z) &= \frac{U}{\Lambda} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \ln \left[\frac{\operatorname{ch} \left(\frac{\pi(x - 2m d)}{2s} \right) - \cos \left(\pm \frac{\pi}{2} \right)}{\operatorname{ch} \left(\frac{\pi(x - 2m d)}{2s} \right) + \cos \left(\pm \frac{\pi}{2} \right)} \right] \\ &= \frac{U}{\Lambda} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \ln 1 \\ V(x, \pm s, z) &= 0 \end{aligned}$$

Cette valeur est compatible avec la contrainte $V = 0$ imposée par les collectrices reliées à la terre.

Rappelons qu'un conducteur à l'équilibre électrostatique présente un potentiel uniforme. Par ailleurs, le potentiel $V(x, y, z)$ est une fonction continue.

Les émettrices, quant à elles, imposent la condition $V(\pm r_e, 0, z) = -U$, soit

$$V(\pm r_e, 0, z) = \frac{U}{\Lambda} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \ln \left[\frac{\operatorname{ch} \left(\frac{\pi(\pm r_e - 2m d)}{2s} \right) - 1}{\operatorname{ch} \left(\frac{\pi(\pm r_e - 2m d)}{2s} \right) + 1} \right] = -U$$

d'où l'on tire

$$\Lambda = - \sum_{m=-\infty}^{\infty} \ln \left[\frac{\operatorname{ch} \left(\frac{\pi(\pm r_e - 2m d)}{2s} \right) - 1}{\operatorname{ch} \left(\frac{\pi(\pm r_e - 2m d)}{2s} \right) + 1} \right]$$

I.A.3.b Les lignes de champ coupent les équipotentielles à angle droit et sont orientées vers les potentiels décroissants. Par ailleurs, le système présente deux lignes de symétrie : la ligne qui joint les deux émettrices ainsi que la ligne perpendiculaire à cette dernière et équidistante des deux émettrices. Compte tenu des propriétés du champ électrique, il s'agit de deux lignes de champ. **À l'intersection, le champ est nécessairement nul.** Enfin, on constate que **c'est au voisinage des émettrices que le champ électrique est le plus intense** du fait du resserrement des lignes de champ.

Rappelons que, si une distribution de charges est invariante par une symétrie de plan \mathcal{P} , alors le champ électrique créé est contenu dans ce plan pour tout point M de ce plan. En conséquence, si une distribution présente une ligne de symétrie (intersection de deux plans de symétrie), celle-ci est nécessairement une ligne de champ.

Centrale Physique et Chimie 2 PSI 2017 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Olivier Frantz (professeur agrégé en école d'ingénieur) et Augustin Long (ENS Lyon) ; il a été relu par Fabrice Maquère (professeur agrégé), Jimmy Roussel (professeur agrégé en école d'ingénieur), Alexandre Herault (professeur en CPGE) et Tom Morel (professeur en CPGE).

Le sujet se compose de cinq parties. Les deux premières sont consacrées à la chimie, avec l'étude de l'hydrazine, et les trois suivantes à la physique, sur le thème de la propulsion d'un projectile.

- Dans la première partie, on étudie le premier propergol (mélange de comburant et de combustible) à avoir été utilisé dans l'aéronautique (1943), l'hydrazine N_2H_4 , en commençant par sa structure.
- La deuxième partie s'intéresse à une pile à combustible utilisant de l'hydrazine. Les notions fondamentales sur l'oxydoréduction, et les piles en particulier, sont mises à profit. Quelques questions portent ensuite sur des diagrammes potentiel-pH. Enfin la thermodynamique de la pile est étudiée avec notamment le calcul de son rendement.
- Dans la partie III, on modélise la propulsion d'une balle dans une arme à feu.
- La partie IV s'intéresse à la trajectoire du projectile dans l'air et à la modélisation de la force de frottement, en utilisant des notions de mécanique des fluides.
- Enfin, la dernière partie étudie différents aspects d'une expérience de coilgun, un canon qui utilise l'électricité plutôt que des explosifs pour accélérer le projectile. Il s'agit d'une partie très expérimentale, qui demande ici un avis sur un capteur, là une exploitation de courbes.

La partie de chimie fait appel à plusieurs aspects des programmes de première et seconde année et propose de nombreuses questions de cours ou d'applications directes relativement classiques. La partie thermodynamique fait travailler sur les différentielles et nécessite de conduire des raisonnements physiques et chimiques pour répondre aux questions.

Dans la partie physique de ce sujet, on passe d'une modélisation mathématique à du calcul approché par exploitation de données expérimentales. Certaines questions demandent de longs calculs tandis que d'autres ne nécessitent que du bon sens et une habitude de la lecture de graphiques.

INDICATIONS

Partie I

- I.A Étudier les rotamères possibles de l'hydrazine. Une molécule présentant un centre de symétrie est apolaire. La proximité spatiale de doublets électroniques est défavorable.
- I.B Identifier une interaction possible entre molécules d'hydrazine et qui n'est pas possible entre molécules d'éthane.

Partie II

- II.A.1 Écrire les couples d'oxydo-réduction en milieu acide ou basique selon le pH de fonctionnement de la pile.
- II.A.4 Une réaction de combustion produit de l'eau et du CO_2 .
- II.B.3 Les électrodes ne doivent pas être corrodées dans les conditions d'utilisation.
- II.C.3.a Écrire la différentielle de G en faisant intervenir le premier et le deuxième principe de la thermodynamique. Le travail du système s'exprime en fonction du travail des forces de pression et du travail électrique.

Partie III

- III.B Appliquer le premier principe de la thermodynamique au système en le considérant isolé.
- III.D Évaluer l'aire sous la courbe de pression pour estimer une intégrale.
- III.E Il y a quatre inconnues (x , z , v et p) pour deux équations. Il faut trouver deux autres équations.

Partie IV

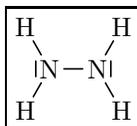
- IV.A Il s'agit d'étudier la chute libre du projectile.
- IV.B.1 Évaluer le nombre de Reynolds.
- IV.B.2 Effectuer un bilan de quantité de mouvement sur la tranche d'air située en amont du projectile, en négligeant toutes les forces autres que celle du choc des molécules d'air sur le projectile, qui a pour effet de les stopper net.

Partie V

- V.C.1 Quelle est la longueur d'onde d'un laser hélium-néon ?
- V.D.3 Si l'accélération est uniforme, la force aussi. Exprimer la variation d'énergie cinétique et le travail de cette force.
- V.E.2.c Faire le calcul complet de la solution du régime libre puis donner la solution approchée en considérant $\tau_{RC} \gg \tau_{RL}$.
- V.E.2.e Utiliser une résolution graphique permettant de trouver τ_{RL} à partir du temps d'annulation de la dérivée de l'intensité.

I. L'HYDRAZINE

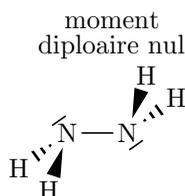
I.A La molécule d'hydrazine possède une liaison N–N et sa structure de Lewis est



La théorie VSEPR prévoit une configuration de type AX_3E_1 pour chaque azote. Il y a donc un environnement électronique de type tétraédrique autour de ces deux atomes. Cependant, chaque azote possède un doublet non liant, créant une répulsion plus grande que celle d'une liaison simple : on attend un angle \widehat{HNH} inférieur à 109° , d'environ 105° .

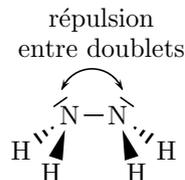
La théorie VSEPR, qui n'est pas au programme car non traitée en MPSI, permet de donner la structure tridimensionnelle d'un atome donné en comptant son nombre d'atomes voisins et son nombre de doublets non liants.

Pour trouver la structure tridimensionnelle de l'hydrazine, il convient de regarder les rotamères de la molécule, en considérant l'angle dièdre formé avec les doublets non liants des deux atomes d'azote. Cette interaction fixe la conformation la plus stable. Un premier rotamère peut être proposé avec les doublets en *anti* (formant un angle dièdre de 180°). Une telle structure présente un centre de symétrie, ce qui aboutirait à un moment dipolaire nul. Or, on constate que le moment dipolaire de l'hydrazine est non nul et assez élevé (proche de celui de l'eau ou de l'éthanol). Une telle structure n'est donc pas possible.

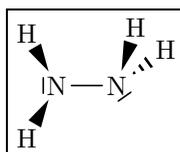


Une représentation de Newman (qui n'est pas connue des élèves issus de la filière MPSI) permet également de caractériser ce rotamère. En regardant dans l'axe de la liaison N–N, il s'agit d'une conformation décalée anti.

De même, on peut proposer un deuxième rotamère limite où les doublets non liants sont en *syn* (avec un angle dièdre de 0°). Pour une telle structure, la répulsion électrostatique entre les deux doublets est trop forte, ce qui déstabilise cette forme.



Un troisième rotamère, issu d'un compromis entre ces deux positions limites des doublets permet de proposer la structure suivante pour l'hydrazine



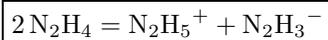
Cette structure est une forme éclipsée, avec un angle dièdre d'environ 120° .

I.B Les atomes d'azote de la molécule d'hydrazine possèdent des doublets non liants et sont susceptibles d'établir des **liaisons hydrogène** avec les atomes d'hydrogène d'une molécule d'hydrazine voisine, la liaison N–H étant polarisée. Un réseau tridimensionnel de liaisons hydrogène s'établit alors entre les molécules du corps pur (comme dans l'eau). Cette interaction intense entre toutes les molécules tend à rendre **les températures de fusion et d'ébullition de l'hydrazine élevées**, et augmentées par rapport à celles de l'éthane, apolaire, de structure tridimensionnelle proche, mais qui n'établit aucune liaison hydrogène entre molécules.

Les températures de changement d'état pour l'hydrazine sont plus élevées que dans l'eau, ce qui est probablement dû à sa masse molaire plus grande.

Cette capacité à établir des liaisons hydrogène procure à l'hydrazine une **très grande solubilité dans l'eau**. En effet, les liaisons hydrogène peuvent s'établir d'une part entre l'atome d'azote et ceux d'hydrogène de l'eau, et d'autre part entre les atomes d'hydrogène de l'hydrazine et ceux d'oxygène de l'eau.

I.C Comme l'eau, l'hydrazine peut capter un proton au niveau du doublet non liant d'un atome d'azote ou perdre un proton pour former l'anion basique. L'équilibre d'autoprotolyse s'écrit alors

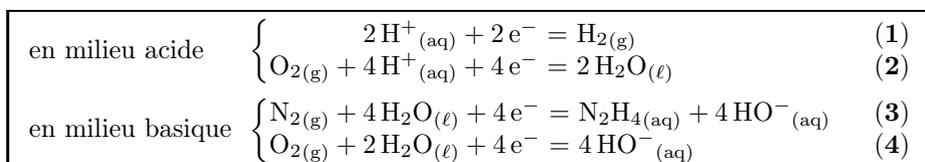


On retrouve un résultat semblable pour l'eau avec un équilibre d'autoprotolyse, dont la constante de réaction est $K_e = 10^{-14}$. Dans l'eau, on définit une zone de pH variant de 0 à 14, ainsi que des acides forts et des bases fortes si le pKa du couple est inférieur à 0 ou supérieur à 14 respectivement. Par analogie, on peut définir pour l'hydrazine (dont la constante d'équilibre d'autoprotolyse est $K_1 = 10^{-25}$) un domaine où les acides et les bases sont faibles et définir des acides forts et des bases fortes dans ce solvant. Enfin, on a $K_1 \ll K_e$, ce qui se traduit par une dissociation de l'hydrazine beaucoup plus faible.

Dans l'hydrazine, les acides faibles sont donc les acides plus faibles que N_2H_5^+ , et les bases faibles sont celles plus faibles que N_2H_3^- .

II. PILE À HYDRAZINE

II.A.1 Les quatre demi-équations électroniques associées aux trois couples sont



Pour la pile à hydrogène utilisée en milieu acide, ce sont les couples H^+/H_2 et $\text{O}_2/\text{H}_2\text{O}$ qui interviennent, avec les demi-équations électroniques (1) et (2).

Pour la pile à hydrazine en milieu basique, ce sont les couples $\text{N}_2/\text{N}_2\text{H}_4$ et $\text{O}_2/\text{H}_2\text{O}$ qui régissent son fonctionnement, avec les demi-équations électroniques (3) et (4).