PSI
Mathématiques · Informatique
2023

Sous la coordination de

William Aufort
professeur en CPGE
ancien élève de l'École Normale Supérieure (de Lyon)

Florian Metzger
professeur en CPGE
ancien élève de l'École Normale Supérieure (Paris-Saclay)

Vincent Puyhaubert
professeur en CPGE
ancien élève de l'École Normale Supérieure (Paris-Saclay)

Par

Virgile Andreani
ENS Ulm

William Aufort
professeur en CPGE

Christophe Fiszka
professeur en CPGE

Julie Gauthier
professeur agrégé

Pierrick Le Vourc'h
ENS de Lyon

Thierry Limoges
professeur en CPGE

Angèle Niclas
ENS de Lyon

Tristan Poullaouec
professeur en CPGE

Cyril Ravat
professeur en CPGE

Quentin Vermande
ENS Ulm

Sommaire

Mines-Ponts

Polytechnique-ENS

Formulaires

SESSION 2023 **PSI8M**

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE PSI

MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
- *Ne pas utiliser de correcteur.*
- *Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.*

Les calculatrices sont interdites.

Le sujet est composé de quatre exercices indépendants.

e3a Mathématiques PSI 2023 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Quentin Vermande (ENS Ulm) ; il a été relu par Angèle Niclas (ENS de Lyon) et Simon Billouet (professeur en CPGE).

Le sujet comporte quatre exercices indépendants, dont un de probabilités, un d'algèbre et deux d'analyse.

- L'exercice 1 propose d'étudier un couple de variables aléatoires étant donné leur loi conjointe. Les premières questions déterminent les lois marginales des variables aléatoires, leur indépendance et leurs espérances et variances. Puis il introduit la matrice donnant la loi de l'une connaissant l'autre et en fait établir des propriétés, notamment son noyau, son image et sa diagonalisabilité.
- L'exercice 2 aboutit au calcul du développement asymptotique à deux termes d'une suite d'intégrales. L'étude utilise la plupart des théorèmes sur l'intégration d'une suite ou d'une série de fonctions.
- L'exercice 3 établit des propriétés des solutions d'une équation matricielle. Les deux premières questions considèrent des cas particuliers pour lesquels on a une résolution explicite. Le reste de l'exercice traite le cas général par l'étude d'une matrice auxiliaire. Les propriétés très fortes qu'a cette matrice sont ensuite exploitées pour obtenir des résultats sur la matrice initiale.
- L'exercice 4 demande de calculer deux intégrales. Après quelques questions de cours, le sujet demande de montrer la dérivabilité d'une intégrale complexe et de calculer sa dérivée dans le but d'obtenir l'égalité de deux fonctions. Puis il propose d'établir la convergence de certaines intégrales et le signe de l'une d'entre elles sans calcul, grâce au théorème spécial des séries alternées, ce qui suffit pour conclure le calcul.

Ce sujet assez peu calculatoire requiert une connaissance solide des théorèmes d'intégration. Les exercices de probabilité et d'algèbre utilisent peu de théorèmes, mais demandent de bien maîtriser les définitions. La difficulté des exercices est croissante.

SESSION 2023 **PSI1M**

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE PSI

MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
- *Ne pas utiliser de correcteur.*
- *Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.*

Les calculatrices sont interdites.

Le sujet est composé d'un exercice et de deux problèmes indépendants.
Chaque problème est constitué de parties indépendantes.

CCINP Maths PSI 2023 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Pierrick Le Vourc'h (ENS de Lyon) ; il a été relu par Thierry Limoges (professeur en CPGE) et Simon Billouet (professeur en CPGE).

Ce sujet est constitué d'un exercice et de deux problèmes. Chacun de ces ensembles est indépendant des autres.

- L'exercice étudie la fonction de Bessel. Il s'intéresse à plusieurs de ses propriétés : sa régularité, une équation différentielle dont elle est solution, et son développement en série entière.
- Le premier problème s'intéresse à une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$, ou plus concrètement au déplacement au cours du temps d'une particule sur une droite. L'objectif est d'étudier les passages par l'origine de la particule. On s'intéresse d'abord à la probabilité qu'elle revienne en l'origine à un certain instant, puis au nombre moyen de ses passages par l'origine.
- Le deuxième problème étudie les limites de suites de puissances de matrices. La première partie est dédiée à l'étude des éléments propres et à la réduction d'une matrice particulière, afin de déterminer la limite de ses puissances. La deuxième partie s'intéresse à la convergence de la suite des puissances d'endomorphismes dont les valeurs propres sont de module strictement inférieur à 1. Enfin, la dernière utilise la deuxième pour montrer la convergence de la méthode de Gauss-Seidel dans le cas de matrices à diagonale strictement dominante.

L'exercice est un bon entraînement sur l'intégration, les séries entières et, dans une moindre mesure, le calcul différentiel. La fonction de Bessel avait par ailleurs déjà été étudiée au concours CCINP en filière PSI (2018). Le premier problème permet de tester ses connaissances sur les séries entières et sur les variables de Bernoulli. Il ne va pas beaucoup plus loin dans les connaissances en probabilités, et il est assez calculatoire. Le dernier problème est également calculatoire. Il est centré sur le programme de réduction de PSI : polynômes annulateurs d'endomorphismes, éléments propres, diagonalisation, trigonalisation, calculs de puissances. Il fait intervenir des raisonnements en plusieurs étapes et permet de s'entraîner à la rédaction des récurrences. Dans l'ensemble, ce sujet est long et difficile pour une épreuve de CCINP.

SESSION 2023 **PSI5IN**

CONCOURS COMMUN INP

ÉPREUVE MUTUALISÉE AVEC E3A-POLYTECH

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE PSI

INFORMATIQUE

Durée : 3 heures

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
- *Ne pas utiliser de correcteur.*
- *Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.*

Les calculatrices sont interdites.

Le sujet est composé de trois parties.

L'épreuve est à traiter en langage **Python** sauf pour les bases de données.

Les différents algorithmes doivent être rendus dans leur forme définitive sur le Document Réponse dans l'espace réservé à cet effet en respectant les éléments de syntaxe du langage (les brouillons ne sont pas acceptés).

La réponse ne doit pas se limiter à la rédaction de l'algorithme sans explication, les programmes doivent être expliqués et commentés.

Énoncé et Annexe : 16 pages
Document Réponse (DR) : 12 pages

Seul le Document Réponse doit être rendu dans son intégralité.

CCINP Informatique PSI 2023 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Virgile Andreani (ENS Ulm) ; il a été relu par Cyril Ravat (professeur en CPGE) et Benjamin Monmege (enseignant-chercheur à l'université).

Ce sujet aborde la reconnaissance optique de caractères, dans sa version classique (algorithmique), telle qu'elle était pratiquée avant l'ère des réseaux de neurones.

- La courte partie I constitue un bon avant-goût du sujet puisqu'elle consiste en quelques rappels sur l'encodage binaire des nombres entiers, en l'analyse de complexité d'une fonction donnée par l'énoncé et en la programmation d'une fonction de segmentation sur la base d'une spécification.
- La partie II, la plus longue des trois, traite d'abord de la rotation d'une image au moyen d'une interpolation bilinéaire, de la détection des lignes, puis de la segmentation des caractères. La détection des lignes de texte utilise un algorithme de maximisation d'une fonction unimodale, alors que la segmentation utilise un algorithme de restauration d'image reposant sur le calcul d'une coupe minimale dans un graphe encodant l'image, au moyen de l'algorithme d'Edmonds–Karp. On demande d'exécuter manuellement cet algorithme, mais pas de l'implémenter, ni de prouver sa convergence.
- La partie III regroupe trois questions classiques de bases de données et quelques autres questions de programmation qui traitent du choix d'un symbole pour chaque caractère segmenté.

Ce sujet est original et bien construit, mais s'avère vague ou imprécis par endroits. L'algorithme d'Edmonds–Karp présenté l'est peut-être un peu trop brièvement pour permettre à des élèves en tronc commun d'appréhender son fonctionnement. Alors que les questions de programmation sont relativement faciles puisque les fonctions les plus difficiles sont pré-remplies, on peut se demander combien d'élèves auront vraiment compris l'intérêt de cette méthode dans la segmentation des caractères, ce qui fait l'objet d'une question. Enfin, l'usage d'un document-réponse pour cette épreuve n'était peut-être pas la meilleure idée. En effet, les espaces laissés pour les réponses, souvent trop courts, ne permettaient jamais d'expliquer le code ou d'ajouter des commentaires, ce qui amène à se demander comment il était possible de suivre les instructions de l'énoncé qui demandait d'éviter le code nu. Lors de l'épreuve, il fallait donc non seulement écrire petit, mais aussi commencer par répondre à la question au brouillon, afin d'éviter de raturer. Le formulaire numpy est également manquant. C'est néanmoins un bon sujet de révision, car représentatif des sujets de concours en informatique tronc commun et présentant un algorithme de graphe élégant qui est normalement au programme de licence en informatique.

Mathématiques 1

PSI

2023

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

4 heures Calculatrice autorisée

Notations et rappels

Dans tout le problème, n est un entier naturel non nul. On identifie un vecteur de $\mathbb{R}^n$ et la matrice colonne à n lignes formée de ses coordonnées dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. L'élément nul de $\mathbb{R}^n$ est noté $0_{\mathbb{R}^n}$.

L'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels est noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et l'ensemble des matrices inversibles d'ordre n est noté $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. On désigne par I_n la matrice identité d'ordre n et par 0_n la matrice nulle d'ordre n.

Pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on appelle image de M, notée $\operatorname{Im} M$ l'image de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à M et on appelle noyau de M, noté $\ker M$, le noyau de cet endomorphisme.

Pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $M^\top$ sa transposée, $\det(M)$ son déterminant, $\operatorname{rg}(M)$ son rang, $\operatorname{tr}(M)$ sa trace, χ_M son polynôme caractéristique et $\operatorname{Sp}_{\mathbb{C}}(M)$ l'ensemble de ses valeurs propres complexes. On rappelle que M et $M^\top$ ont le même rang et le même déterminant.

On note $\mathcal{T}$ la transposition dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire l'application qui à toute matrice M associe $M^\top$.

Si $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, ..., e'_n)$ sont deux bases de $\mathbb{R}^n$ et si f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$, on note $\mathrm{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ la matrice dont, pour tout entier $j \in [\![1, n]\!]$, la j-ième colonne est formée des coordonnées du vecteur $f(e_j)$ dans la base $\mathcal{B}'$.

Lorsque $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$, on simplifie la notation $\mathrm{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$ en $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f)$ qui désigne la matrice, dans la base $\mathcal{B}$, de l'endomorphisme f. On définit la suite des puissances de f en posant

$$\begin{cases} f^0 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}, & \\ \forall k \in \mathbb{N}, & f^{k+1} = f \circ f^k. \end{cases}$$

Si $\Pi = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$, on rappelle que $\Pi(f) = \sum_{k=0}^{p} a_k f^k$.

Lorsque $M_1, ..., M_k$ désignent des matrices carrées d'ordres respectifs $n_1, ..., n_k$, on note $\operatorname{diag}(M_1, ..., M_k)$ la matrice carrée d'ordre $n_1 + ... + n_k$, diagonale par blocs, égale à

$$\begin{pmatrix} M_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & M_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & M_k \end{pmatrix}.$$

On dit qu'un endomorphisme Φ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

— conserve le rang si $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\operatorname{rg}\big(\Phi(M)\big) = \operatorname{rg}(M)$;

— conserve le déterminant si $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\det\big(\Phi(M)\big) = \det(M)$;

— conserve la trace si $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\operatorname{tr}\big(\Phi(M)\big) = \operatorname{tr}(M)$;

— conserve le polynôme caractéristique si $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\chi_{\Phi(M)} = \chi_M$.

L'objectif du problème est de caractériser les endomorphismes réalisant l'une de ces propriétés.

I Résultats préliminaires

I.A – On suppose que $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont trois bases de $\mathbb{R}^n$ et que f et g sont deux endomorphismes de $\mathbb{R}^n$.

Q 1. *Question de cours.* Démontrer que

$$\mathrm{M}_{\mathcal{E},\mathcal{G}}(g \circ f) = \mathrm{M}_{\mathcal{F},\mathcal{G}}(g)\, \mathrm{M}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(f).$$

Q 2. En déduire qu'il existe deux matrices P et Q appartenant à $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$\mathrm{M}_{\mathcal{F},\mathcal{G}}(f) = P\, \mathrm{M}_{\mathcal{E}}(f)\, Q.$$

I.B – On suppose que M est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Q 3. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de M et X un vecteur propre associé. Montrer que, pour tout entier naturel k, $M^k X = \lambda^k X$.

Centrale Maths 1 PSI 2023 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Angèle Niclas (ENS de Lyon) ; il a été relu par Julie Gauthier (professeur agrégé) et Simon Billouet (professeur en CPGE).

Ce sujet caractérise les endomorphismes de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ qui conservent certaines propriétés comme le rang, le déterminant ou le polynôme caractéristique. Ces endomorphismes ont un lien fort avec les applications

$$\Phi_{\mathrm{P,Q}}\colon \left\{\begin{array}{ccc}\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ \mathrm{M} & \longmapsto & \mathrm{PMQ}\end{array}\right. \qquad \text{et} \qquad \Psi_{\mathrm{P,Q}}\colon \left\{\begin{array}{ccc}\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ \mathrm{M} & \longmapsto & \mathrm{PM}^\top\mathrm{Q}\end{array}\right.$$

où $\mathrm{P}, \mathrm{Q} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ sont plus ou moins contraintes selon la propriété à conserver. Les cinq parties sont liées entre elles.

- La partie I, très courte, demande de redémontrer des résultats du cours sur les changements de base et sur le lien entre le polynôme annulateur et les valeurs propres d'un endomorphisme.
- La partie II introduit les endomorphismes de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ en se concentrant sur trois cas particuliers : la multiplication à gauche par une matrice donnée ($\mathrm{M} \mapsto \mathrm{AM}$), et la multiplication à gauche et à droite par des matrices avec ou sans transposition préalable ($\mathrm{M} \mapsto \mathrm{PMQ}$ et $\mathrm{M} \mapsto \mathrm{PM}^\top\mathrm{Q}$). Dans chaque cas, les propriétés préservées sont caractérisées.
- La partie III sert d'intermède avant d'aborder le cas général et présente quelques propriétés utiles concernant les matrices de rang donné. Par exemple, il est démontré que toute matrice $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de rang r peut s'écrire sous la forme

$$\mathrm{M} = \mathrm{P}\,\mathrm{diag}\,(\mathrm{I}_r, 0_{n-r})\mathrm{Q} \qquad \text{avec} \qquad \mathrm{P}, \mathrm{Q} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$$

- La partie IV a pour objectif de caractériser les endomorphismes de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ qui conservent le rang. Après plusieurs changements de base, il est démontré que ces endomorphismes sont exactement ceux de la forme $\Phi_{\mathrm{P,Q}}$ et $\Psi_{\mathrm{P,Q}}$ étudiés dans la partie II.
- Finalement, dans la partie V, on caractérise les endomorphismes de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ qui préservent le déterminant ou le polynôme caractéristique. Après avoir redémontré certaines propriétés de la trace, il est prouvé que tous ces endomorphismes conservent aussi le rang. Les résultats de la partie IV sont généralisés pour conclure.

Ce problème fait appel à de nombreux résultats du cours d'algèbre linéaire ou étroitement liés à celui-ci, et une grande partie du sujet est faisable en fin de première année. Sa difficulté réside surtout dans la partie IV et la manipulation des endomorphismes de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont les bases sont constituées de matrices plutôt que de vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Il comporte parfois des calculs complexes et nécessite une compréhension claire des différents espaces manipulés. Les questions sont étroitement liées et exigent une vision d'ensemble des résultats déjà démontrés. Les parties I, II, III et V sont, à l'inverse, proches du cours et constituent un bon sujet de révision du programme de première année.

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Mathématiques 2

PSI

2023

4 heures Calculatrice autorisée

Quelques applications de la formule de Stirling

Ce problème propose de démontrer un raffinement de la formule de Stirling et de l'appliquer à l'étude des marches aléatoires sur $\mathbb{Z}$.

I Intégrale de Gauss

Le but de cette partie est de calculer l'intégrale dite de Gauss : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

Q 1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente.

On étudie les fonctions f et g définies par

$$f(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-(t^2+1)x^2}}{t^2+1}\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad g(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Q 2. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est paire. Calculer $f(0)$.

Q 3. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et donner l'expression de $f'(x)$.

Q 4. Montrer que g est définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Q 5. À l'aide d'un changement de variable affine, montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = -2g'(x)g(x).$$

Q 6. Vérifier que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{\pi}{4} - g(x)^2.$$

Q 7. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$, puis conclure que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

II Formule de Stirling

Dans cette partie, on propose de démontrer un raffinement de la formule de Stirling. On va prouver l'existence d'une suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergente vers 0 telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{q_n}{n}\right).$$

II.A – Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

Q 8. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.

Q 9. Donner une relation entre I_{n+1} et I_n, et en déduire que $I_n = n!$ pour tout entier naturel n.

II.B – Cette sous-partie est consacrée à la démonstration de la formule de Stirling classique

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n. \qquad \text{(II.1)}$$

Centrale Maths 2 PSI 2023 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Thierry Limoges (professeur en CPGE) ; il a été relu par Céline Chevalier (enseignant-chercheur à l'université) et Vincent Puyhaubert (professeur en CPGE).

Ce sujet d'analyse et probabilités est centré sur la formule de Stirling et sur une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$.

- La première partie calcule l'intégrale de Gauss
$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{\,-t^2}\,\mathrm{d}t$$
en utilisant une intégrale à paramètre.
- La partie II démontre la formule de Stirling et plus précisément le développement asymptotique
$$n\,! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n\left(1+\frac{1}{12n}+\underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$
à l'aide d'une suite de fonctions et d'un encadrement série-intégrale. Les théorèmes de convergence dominée sont les clés des preuves dans cette section.
- La partie suivante s'intéresse à la probabilité du retour à l'origine dans une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$. On y calcule la probabilité de ne jamais revenir à l'origine en utilisant des séries entières.
- Enfin, dans la partie IV, on calcule la probabilité du dernier retour à l'origine dans le cas d'une marche équilibrée. On y trouve une interprétation géométrique et un peu de combinatoire. La fin de la partie comporte quelques majorations techniques et de l'intégration de première année.

Le sujet balaye de nombreuses notions d'analyse de prépa comme l'intégration, les suites et les séries. Hormis un développement en série entière, les parties III et IV portent sur les probabilités et sont accessibles dès la première année. Par ailleurs, on peut retrouver certains résultats intermédiaires de la partie III dans le sujet PSI Maths CCINP 2 2023.

La plupart des questions sont de difficulté standard. Elles sont cependant trop nombreuses pour que le sujet puisse être terminé en quatre heures. Celui-ci reste un bon outil de révision, à traiter au cours de la seconde année.

A2023 – MATH I PSI

Concours commun
Mines-Ponts

ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARIS,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARIS,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS,
CHIMIE PARISTECH - PSL.

Concours Mines-Télécom,
Concours Centrale-Supélec (Cycle International).

CONCOURS 2023

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice ou de tout dispositif électronique est interdit.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES I - PSI

L'énoncé de cette épreuve comporte 5 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Mines Maths 1 PSI 2023 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Tristan Poullaouec (professeur en CPGE) ; il a été relu par Loïc Jean (ENS de Lyon) et Gilbert Monna (professeur honoraire en CPGE).

Ce problème est constitué de cinq parties pouvant être traitées indépendamment les unes des autres puisque les résultats indispensables sont donnés dans l'énoncé. Elles sont toutefois fortement liées (surtout les deux dernières), dans le sens où les mêmes idées reviennent à plusieurs reprises.

- Dans la partie I, on établit quelques résultats préliminaires sur les matrices symétriques positives (resp. définies positives) et sur les fonctions convexes.
- La deuxième partie démontre une première inégalité de convexité portant sur les traces et les déterminants des matrices symétriques positives.
- On prouve dans la partie suivante que $\ln \circ \det$ est une application concave sur l'ensemble des matrices symétriques définies positives, en partant d'une sorte de diagonalisation simultanée de deux matrices symétriques.
- La quatrième partie sert de préambule à la dernière : on se fait d'abord la main sur l'application $g\ :\ t \mapsto \det(\mathrm{I}_n + t\mathrm{A})$ avant de passer, dans la partie V, à l'application $f_{\mathrm{A}}\ :\ t \mapsto \det(\mathrm{A}+t\mathrm{M})$, dont on étudie la régularité avant d'établir une belle inégalité reliant une fois de plus déterminants et traces de matrices symétriques.

La difficulté des questions augmente progressivement au fil du problème et les mêmes idées reviennent fréquemment, si bien qu'il valait mieux traiter les questions dans l'ordre et éviter de papillonner. D'ailleurs, dans ce problème, il était difficile d'avancer après avoir sauté une question.

Comme l'auteur de l'énoncé l'a insinué fort subtilement, ce sujet traite avant tout de convexité et il vaut mieux ne pas être allergique aux manipulations d'inégalités pour l'aborder. Les relations de convexité vont servir à établir des relations entre les déterminants et les traces de matrices symétriques, et on recourra pour cela au théorème spectral. Au final, le problème fait appel à peu de notions du programme de prépa :

- La définition de la convexité étant rappelée par l'énoncé, il faut juste savoir caractériser la convexité d'une fonction numérique à l'aide de sa dérivée seconde.
- Il faut bien entendu maîtriser le théorème spectral et savoir exprimer la trace et le déterminant d'une matrice symétrique à l'aide de ses valeurs propres.

Pour le reste, il suffit d'apprivoiser les notations et concepts exposés dans l'énoncé pour répondre proprement aux questions. La difficulté de celles-ci est raisonnable, mais comme l'épreuve ne dure que trois heures, il fallait rester concentré et productif pour traiter le sujet en entier.

A2023 – MATH II PSI

ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARIS,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARIS,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS,
CHIMIE PARISTECH - PSL.

Concours Mines-Télécom,
Concours Centrale-Supélec (Cycle International).

CONCOURS 2023

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice ou de tout dispositif électronique est interdit.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES II - PSI

L'énoncé de cette épreuve comporte 6 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Mines Maths 2 PSI 2023 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Christophe Fiszka ; il a été relu par Hai Châu Nguyên (ENS de Lyon) et Tristan Poullaouec (professeur en CPGE).

Ce sujet étudie le nombre de points fixes d'une permutation d'un point de vue probabiliste, notamment via une notion de convergence des variables aléatoires : la convergence en variation totale.

- La première partie, composée de 9 questions, se place dans l'espace probabilisé $(\mathcal{S}_n, \mathrm{P}_n)$ où $\mathcal{S}_n$ est l'ensemble des permutations de $[\![1 ; n]\!]$ et P_n la probabilité uniforme sur $\mathcal{S}_n$. Le choix d'une probabilité uniforme permet de réduire les calculs à des questions de dénombrement. On y établit notamment la loi de la variable aléatoire X_n qui à toute permutation associe son nombre de points fixes, ainsi que son espérance. Les calculs sont facilités par l'introduction de séries entières.
- La seconde partie, constituée de 6 questions, introduit la variation totale qui permet de définir une distance sur l'ensemble $\mathcal{D}_\mathbb{N}$ des distributions sur $\mathbb{N}$ par

$$\forall x, y \in \mathcal{D}_\mathbb{N} \qquad d_{\mathrm{VT}}(x, y) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} \left| x(k) - y(k) \right|$$

  La partie se conclut sur la convergence de la suite de variables aléatoires $(\mathrm{X}_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie à la partie précédente vers une variable aléatoire suivant une loi de Poisson.
- La dernière partie, en 7 questions, illustre un autre type de convergence assez classique : la convergence de lois binomiales $\mathcal{B}(n, \alpha/n)$ vers une loi de Poisson.

Le sujet est bien rédigé, clair, de difficulté progressive et intéressant. Il contient des questions classiques, pour tester les méthodes acquises par les candidats, mais aussi quelques questions délicates pour les plus aguerris. Il constitue un bon sujet d'entraînement sur le dénombrement, les probabilités, les séries numériques et les séries entières.

A2023 – INFO

ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARIS,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARIS,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS,
CHIMIE PARISTECH - PSL.

Concours Mines-Télécom,
Concours Centrale-Supélec (Cycle International).

CONCOURS 2023

ÉPREUVE D'INFORMATIQUE COMMUNE

Durée de l'épreuve : 2 heures

L'usage de la calculatrice ou de tout dispositif électronique est interdit.

Cette épreuve est commune aux candidats des filières MP, PC et PSI.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

INFORMATIQUE COMMUNE

L'énoncé de cette épreuve comporte 8 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Mines Informatique MP-PC-PSI 2023 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Cyril Ravat (professeur en CPGE) ; il a été relu par Sarah Houdaigoui (ENS Ulm) et Julien Dumont (professeur en CPGE).

Cette épreuve traite de typographie, c'est-à-dire de la façon de former des caractères et de les agencer pour former un texte lisible. Elle utilise des termes techniques précis comme « glyphe », « œil » ou « chasse » et aborde plusieurs problèmes liés à cette thématique, du traitement individuel des caractères à l'agencement global des mots dans les textes justifiés.

- La partie I, très courte et essentiellement descriptive, permet de comprendre comment sont définis les glyphes (représentations graphiques des caractères) qui seront manipulés dans la suite du sujet.
- La partie II, très courte elle aussi, est constituée de trois questions sur les bases de données dont le but est de sélectionner des polices et des caractères.
- Dans la partie III, on écrit des fonctions en Python permettant de manipuler les descriptions vectorielles des glyphes.
- La partie IV introduit une bibliothèque Python de traitement d'image et aborde le problème du tracé des lignes sur une image pixelisée. Il est notamment demandé d'expliquer, sur un exemple, un code donné dans l'énoncé.
- La partie V poursuit le travail de la partie précédente en guidant l'écriture du code nécessaire à l'affichage complet des caractères et des mots au sein d'une image.
- Enfin, la dernière partie aborde un sujet différent, celui de l'agencement des mots et des espaces permettant d'obtenir un texte justifié sur plusieurs lignes. Bien que les codes correspondant aux algorithmes les plus complexes soient fournis, elle est plus difficile et fait intervenir des notions d'algorithmique : principe des algorithmes gloutons, programmation dynamique, mémoïsation, calcul de complexité.

En dépit d'une quantité importante de mots et de concepts initialement inconnus de la majorité des candidats, ce sujet est suffisamment progressif pour être accessible à tout élève motivé. Il balaye de façon efficace une grande partie du programme des deux années. Les élèves de sup pourront néanmoins s'entraîner en laissant de côté les parties II et VI. Enfin, il est appréciable qu'un sujet dise aux futurs ingénieurs, chercheurs ou professeurs que la beauté compte dans leurs futurs métiers. C'est pourquoi la très grande majorité des documents scientifiques sont produits à l'aide de logiciels qui accordent une grande importance à la typographie, ce qui n'est pas le cas de logiciels plus classiques... Chez H&K, nous mettons un point d'honneur à ce que nos livres soient agréables à lire, et toutes nos publications utilisent bien sûr LaTeX dans les règles de l'art !

ECOLES NORMALES SUPERIEURES
ECOLE POLYTECHNIQUE

CONCOURS D'ADMISSION 2023

LUNDI 17 AVRIL 2023
08h00 - 12h00

FILIERE PSI

MATHEMATIQUES (XUSR)

Durée : 4 heures

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve

X/ENS Maths PSI 2023 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Julie Gauthier (professeur agrégé) ; il a été relu par David Michel (professeur en CPGE) et Tristan Poullaouec (professeur en CPGE).

Ce sujet introduit la divergence de Kullback-Leibler et donne des résultats concernant le point selle de fonctions construites à partir de cette divergence. Il utilise pour cela des fonctions de plusieurs variables et des résultats de convexité.

L'énoncé utilise les notations ln et log mais toutes deux désignent ici le logarithme népérien. La notation ln étant celle choisie dans les programme de CPGE, c'est celle qui est retenue dans ce corrigé.

- Dans la partie I, on rappelle les notions d'ensemble convexe et de fonction convexe. On démontre que le noyau d'une matrice est égal à l'orthogonal de l'image de sa transposée. Enfin, on démontre le théorème des extrema liés et on s'intéresse au point selle du Lagrangien associé au problème d'optimisation sous contraintes.
- La partie II traite de l'encodage de mots par des codes particuliers, dits codes préfixes, en introduisant des fonctions usuelles en théorie de l'information telles que l'entropie et la divergence de Kullback-Leibler. Le but de cette partie est de majorer l'espérance de la longueur d'un code préfixe. On démontre le théorème du codage de source.
- L'objectif de la partie III est d'étudier le minimum d'une fonction strictement convexe définie à partir de la divergence de Kullback-Leibler. On démontre que ce minimum est atteint une et une seule fois. On y trouve au début des questions de probabilités qui sont très abordables.
- Enfin, dans la partie IV, on étudie plus en détail le Lagrangien du problème de la partie III pour construire une suite minimisante.

Ce sujet est très centré sur l'analyse mais fait aussi appel à des résultats d'algèbre, en particulier euclidienne, et de probabilités finies dans quelques questions. Les thèmes clés sont la convexité et les fonctions de plusieurs variables. La difficulté est raisonnable pour un sujet d'X-ENS. L'introduction de concepts nouveaux par l'énoncé favorisait les candidats aptes à se les approprier rapidement et correctement.

ECOLE POLYTECHNIQUE - ESPCI
ECOLES NORMALES SUPERIEURES

CONCOURS D'ADMISSION 2023

JEUDI 20 AVRIL 2023
16h30 - 18h30

FILIERES MP-PC-PSI
Epreuve n° 8

INFORMATIQUE B (XELSR)

Durée : 2 heures

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve

X/ENS Informatique B MP-PC-PSI 2023 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par William Aufort (professeur en CPGE) ; il a été relu par Virgile Andreani (ENS Ulm) et Benjamin Monmege (enseignant-chercheur à l'université).

Ce sujet s'intéresse à la gestion de version de longs textes, dont la principale application concerne les codes informatiques. Certains logiciels, comme Git, utilisent des algorithmes permettant à plusieurs développeurs de travailler sur un même programme, puis de fusionner leurs versions si elles ne sont pas en conflit, ou encore de conserver un historique des différentes modifications effectuées. L'idée consiste à ne pas stocker les différentes versions complètes (elles sont en général très volumineuses), mais seulement les différences entre deux versions dans un *différentiel*. La donnée d'une version et d'un différentiel permet de reconstruire le texte modifié.

- La partie I introduit les principales notions et structures de données qui seront utilisées et adaptées dans la suite : tranche, différentiel et texte versionné. Un premier algorithme de calcul de différentiel est implémenté dans le cas simple où les modifications à effectuer concernent des portions de longueurs égales dans les deux textes.
- La partie II s'affranchit de cette hypothèse et adapte les structures de données précédemment mises en place. Un lien est alors établi avec le calcul de la distance d'édition entre deux textes, un grand classique de la programmation dynamique, dont une résolution est proposée. La détection de conflits entre deux différentiels et un algorithme de fusion de modifications sont également implémentés.
- Enfin, la partie III modélise le calcul d'une distance d'édition sous la forme de la recherche d'un plus court chemin dans un graphe pondéré associé aux deux textes à comparer. Les algorithmes au programme de prépa pour résoudre ce problème, à savoir l'algorithme de Dijkstra et l'algorithme A^*, sont alors étudiés dans ce cadre, notamment du point de vue de la complexité temporelle.

Comme depuis plusieurs années à l'X, il s'agit d'un sujet exclusivement d'algorithmique, très bien écrit et détaillé. Il est de plus d'une longueur raisonnable, même s'il comporte quelques questions de programmation plus techniques. Au-delà des capacités de programmation et d'assimilation de nouvelles structures de données, ce sujet évaluait les connaissances et la compréhension des candidats sur le paradigme de programmation dynamique et sur les algorithmes de graphes, qui sont deux nouveaux chapitres au programme de prépa. Cela en fait un bon sujet pour retravailler ces deux thèmes.