mémento sciences

ce qu'il faut VRAIMENT retenir !

1er cycle - prépas - concours

Électromagnétisme

Richard Taillet

de boeck

Électromagnétisme

Richard TAILLET

Pour toute information sur notre fonds et les nouveautés dans votre domaine de spécialisation, consultez notre site web : **www.deboeck.com**

Rue des Minimes 39,
B-1000 Bruxelles

Conception graphique : Bambook
Réalisation : Richard Taillet

Imprimé en Belgique

Dépôt légal :
Bibliothèque nationale, Paris : août 2013
Bibliothèque royale de Belgique : 2013/0074/162 ISBN 978-2-8041-8176-5

Avant-propos

Cet ouvrage a pour but de rappeler les fondements de l'électromagnétisme, couvrant le programme du 1er cycle universitaire (L1, L2 et L3) et des classes préparatoires aux grandes écoles. Il a été écrit pour fournir un outil de révision et ne pourra en aucun cas se substituer au cours ou à des ouvrages plus approfondis, même si un effort a été fait pour expliquer en détail certaines notions ou certains calculs.

Les mots-clés sont expliqués directement dans le texte : ils sont indiqués en gras et répertoriés dans l'index.

Plusieurs chapitres se terminent par des « Focus », des compléments qui permettent de préciser davantage une notion ou présentent dans les grandes lignes une illustration des concepts abordés dans le chapitre.

Nous avons choisi de ne pas ponctuer les formules mathématiques, afin d'éviter toute ambiguïté avec les points et les virgules qui pourraient être mal interprétés.

Je remercie chaleureusement Gisèle Gruener et Justine Lazareth pour leur relecture critique du manuscrit, ainsi que toutes les autres personnes qui, par leurs remarques, ont contribué à améliorer la clarté de cet ouvrage.

Richard Taillet.

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

L'électromagnétisme est le domaine de la physique qui s'intéresse à l'ensemble des phénomènes électriques et des phénomènes magnétiques. Ses lois généralisent celles de l'électrostatique et de la magnétostatique qui décrivent le champ électrique $\vec{E}$ et le champ magnétique $\vec{B}$ dans des situations où ces champs sont statiques, c'est-à-dire ne dépendent pas du temps. Lorsqu'ils en dépendent, de nouveaux phénomènes physiques se manifestent. En particulier, la variation temporelle d'un champ magnétique agit comme une source de champ électrique. C'est le phénomène d'**induction électromagnétique**. De même, la variation temporelle d'un champ électrique fait apparaître un champ magnétique. L'électromagnétisme a pour objet l'étude de ces effets. On regroupe aussi dans ce domaine les phénomènes de conduction électrique.

L'électromagnétisme est fondé sur les équations de Maxwell, un ensemble de quatre équations décrivant le champ magnétique et le champ électrique. Ces équations s'écrivent avec des opérateurs vectoriels, des objets mathématiques qui peuvent sembler effrayants à première vue mais qu'il convient de ne considérer que comme des outils mathématiques comme les autres. Le premier chapitre est consacré à la description de ces opérateurs vectoriels et au rappel de certaines de leurs propriétés.

Ces équations furent écrites pour la première fois sous leur forme complète en 1861 par James Maxwell (1831–1879). La première conséquence fondamentale fut la prédiction de l'existence puis la découverte d'un nouveau type d'ondes, dans lesquelles un champ électrique et un champ magnétique évoluent de façon couplée. On les appelle des **ondes électromagnétiques**. Leur existence fut prouvée expérimentalement en 1887 par Heinrich Hertz (1857–1894) qui les produisit, les détecta et étudia leurs propriétés. Les ondes électromagnétiques sont omniprésentes autour de nous, elles sont utilisées dans tous les modes de télécommunication moderne.

Il fut rapidement établi que la lumière est une onde électromagnétique, correspondant à une gamme de longueurs d'onde bien précise. L'optique peut dès lors s'étudier dans le cadre de l'électromagnétisme, ce qui permet de décrire quantitativement certaines propriétés de la lumière comme l'intensité lumineuse ou la polarisation. Nous n'aborderons pas la spécificité des ondes lumineuses dans cet ouvrage et nous renvoyons le lecteur au « Mémento d'optique ondulatoire », publié dans la même collection.

L'électromagnétisme permet aussi de comprendre les phénomènes associés aux circuits électriques et électroniques que l'on regroupe souvent sous le terme « électrocinétique » : courant électrique, relation avec la tension, etc. Nous reviendrons sur les propriétés du champ électromagnétique nécessaires pour aborder l'électrocinétique.

Enfin, le dernier chapitre présente l'électromagnétisme sous un jour différent, en révélant les liens profonds avec la relativité restreinte.

Chapitre 2

Opérateurs vectoriels

La formulation des lois de l'électromagnétisme fait appel à des notions mathématiques particulières et généralement nouvelles quand on aborde ce cours. Ce chapitre rassemble les définitions et les propriétés qui sont utilisées en électromagnétisme : la notion de **champ** et celle d'**opérateurs vectoriels**, des objets mathématiques qui agissent sur ces champs. On en rencontre principalement trois, le **gradient**, la **divergence** et le **rotationnel**. Que le lecteur ne se décourage pas de commencer si vite par des points techniques relevant des mathématiques, il peut sans problème passer directement au chapitre suivant et revenir sur celui-ci au fur et à mesure que les opérateurs seront utilisés dans la suite.

1. Champ scalaire et champ vectoriel

Un **champ** est une quantité qui prend une valeur en chaque point M de l'espace, c'est une fonction de la position.

Lorsque cette quantité est un nombre $f(M)$ qui ne dépend pas du système de coordonnées choisi pour repérer la position du point M (cette précision deviendra plus claire à la fin de ce paragraphe), le champ est qualifié de **scalaire**. Par exemple, la température $T(M)$ en chaque point de la pièce dans laquelle vous vous trouvez forme un champ scalaire. En électromagnétisme, le potentiel électrique $V(M)$ est aussi un champ scalaire.

Lorsque cette quantité est un vecteur $\vec{v}(M)$, le champ est qualifié de **vectoriel**. Par exemple, la vitesse du vent en chaque point de l'atmosphère constitue un champ vectoriel. En électromagnétisme, le champ électrique, le champ magnétique et le potentiel vecteur sont aussi des champs vectoriels.

! Attention, ce n'est pas parce qu'une grandeur s'écrit sans flèche vectorielle qu'il s'agit d'un scalaire. Chaque composante d'un champ vectoriel, par exemple $v_x(M)$, ne constitue pas un champ scalaire car sa valeur ne dépend pas seulement du point M, mais aussi du repère qu'on a choisi pour exprimer les coordonnées du vecteur. En un même point M, la valeur de $v_x(M)$ peut changer si on effectue une rotation du repère, par exemple.

! Attention, ce n'est pas non plus parce qu'une quantité s'écrit avec un vecteur qu'il s'agit d'un champ vectoriel. Par exemple, la vitesse d'une particule ponctuelle est bien un vecteur, mais pas un champ : à tout instant elle n'a de valeur qu'en un point, à la position de la particule **à cet instant**, et non dans tout l'espace.

Les champs peuvent s'écrire comme des fonctions des coordonnées du point M, par exemple x, y et z en coordonnées cartésiennes. Il est possible de considérer les dérivées de ces fonctions par rapport aux variables d'espace. Les opérateurs vectoriels que nous introduisons dans les paragraphes suivants sont basés sur ces dérivées spatiales.

2. Vecteur nabla

Dans la suite, plusieurs expressions s'écriront plus simplement en introduisant un objet symbolique, prenant la forme d'un vecteur appelé **vecteur nabla**, noté $\vec{\nabla}$ et qui en coordonnées cartésiennes s'écrit

$$\vec{\nabla} \equiv \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Ce symbole n'a de sens que s'il est suivi d'un autre objet, par exemple une fonction (auquel cas il s'agit du gradient de cette fonction, ► **paragraphe 4**),

$$\vec{\nabla} f \equiv \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$$

ou un vecteur (voir plus loin).

3. Divergence

La **divergence** est un opérateur agissant sur un champ de vecteurs $\vec{v}(M)$ pour former un champ scalaire. On la note $\operatorname{div}\vec{v}$. Son expression dépend du système de coordonnées que l'on adopte. En coordonnées cartésiennes il s'écrit, en notant v_x, v_y et v_z les coordonnées de $\vec{v}$,

$$\operatorname{div}\vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

Il prend la forme d'un produit scalaire entre $\vec{\nabla}$ et le vecteur $\vec{v}$, d'où la notation

$$\operatorname{div}\vec{v} = \vec{\nabla}\cdot\vec{v}$$

En coordonnées cylindriques (ρ, ϕ, z), il s'écrit

$$\operatorname{div}\vec{v} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho v_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

et en coordonnées sphériques (r, θ, ϕ)

$$\operatorname{div}\vec{v} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(v_\theta\sin\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi}$$

La divergence intervient en physique dans les équations de continuité (conservation de la masse dans un écoulement, conservation de la charge électrique, ► **chapitre 5**) et dans les équations de Maxwell, par exemple.

4. Gradient

Le **gradient** est un opérateur agissant sur un champ scalaire $f(M)$ pour former un champ vectoriel. On le note $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f$. Son expression dépend du système de coordonnées que l'on adopte. En coordonnées cartésiennes il s'écrit

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f = \frac{\partial f}{\partial x}\,\vec{u}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\vec{u}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\,\vec{u}_z$$

Formellement, on peut considérer qu'il s'agit de l'action du vecteur $\vec{\nabla}$ sur la fonction f, d'où la notation

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f = \vec{\nabla}\, f$$

Ce vecteur est en tout point orthogonal aux surfaces sur lesquelles f est constante et pointe dans la direction des valeurs croissantes de f. Sa propriété fondamentale est qu'il permet d'exprimer la variation $df \equiv f(\vec{r}+d\vec{r}) - f(\vec{r})$ de la fonction f entre deux positions infinitésimalement proches $\vec{r}$ et $\vec{r}+d\vec{r}$, sous la forme

$$df = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f \cdot d\vec{r}$$

Le gradient s'écrit aussi en coordonnées cylindriques (ρ, ϕ, z)

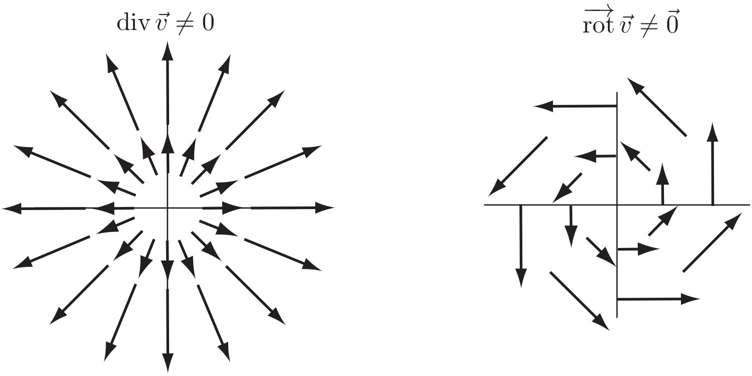
$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f = \frac{\partial f}{\partial \rho}\,\vec{u}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \phi}\,\vec{u}_\phi + \frac{\partial f}{\partial z}\,\vec{u}_z$$

et en coordonnées sphériques

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f = \frac{\partial f}{\partial r}\,\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\,\vec{u}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}\,\vec{u}_\phi$$

Le gradient intervient en physique dans la relation entre les forces conservatives et les potentiels ϕ dont elles dérivent, $\vec{F} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi$. On le rencontre assez tôt en hydrostatique, dans la relation entre la distribution de pression dans un fluide et la poussée d'Archimède. Il intervient dans toutes les situations où l'on

Figure 2.1 **Exemples de champs particuliers**



Le champ de gauche (ici $\vec{v}(\vec{r}) = \vec{r}$) a une divergence non nulle mais un rotationnel nul, celui de droite ($\vec{v}(\vec{r}) = \vec{\Omega} \wedge \vec{r}$ où $\vec{\Omega}$ est un vecteur constant, perpendiculaire au plan de la feuille) a une divergence nulle et un rotationnel non nul. Voir le focus 2 pour le calcul.

cherche à décrire les variations spatiales d'un champ. En électromagnétisme, le gradient intervient notamment dans la relation entre le champ électrique et le potentiel électrique ou électrostatique.

5. Rotationnel

Le **rotationnel** est un opérateur agissant sur un champ de vecteurs $\vec{v}(M)$ pour former un champ vectoriel. Il est lui aussi construit à partir des dérivées spatiales et s'écrit en coordonnées cartésiennes

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\vec{u}_x + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right)\vec{u}_y + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\vec{u}_z$$

Il prend la forme d'un produit vectoriel entre $\vec{\nabla}$ et $\vec{v}$, d'où la notation

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{v} = \vec{\nabla} \wedge \vec{v}.$$

Dans les ouvrages anglo-saxons, il est noté $\overrightarrow{\mathrm{curl}}\,\vec{v}$ ou $\vec{\nabla} \times \vec{v}$.

6. Quelques propriétés

Mentionnons quelques propriétés mathématiques de ces opérateurs. Tout d'abord, pour tout champ vectoriel $\vec{v}$, on a nécessairement

$$\mathrm{div}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{v}\right) = 0$$

Ceci se démontre facilement, il suffit de reprendre les coordonnées du rotationnel dans le paragraphe précédent et de calculer la divergence de ce vecteur, on trouve que les termes s'annulent tous deux à deux.

De même, on peut montrer que pour toute fonction f,

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f\right) = \vec{0}$$

et (▶ **focus 1** pour la démonstration)

$$\mathrm{div}\left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f\right) = \triangle f$$

où $\triangle f$ désigne le **laplacien**, un opérateur différentiel défini par

$$\triangle f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Enfin, mentionnons la relation

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{v}\right) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}(\mathrm{div}\,\vec{v}) - \vec{\triangle}\vec{v}$$

où le **laplacien vectoriel** $\vec{\triangle}\vec{v}$ a pour coordonnées $(\triangle v_x, \triangle v_y, \triangle v_z)$. On utilisera cette relation au **chapitre 6**.

7. Deux théorèmes importants

Ces opérateurs interviennent dans deux relations qui jouent un rôle important en électromagnétisme. Il n'est pas question ici de les démontrer, et dans un premier temps nous conseillons au lecteur de se concentrer sur la signification des deux relations suivantes, plutôt que sur leur démonstration mathématique.

D'une part, le **théorème de Green-Ostrogradsky**,

$$\oiint_{\mathcal{S}} \vec{v} \cdot \vec{n}\, dS = \iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \vec{v}\, d^3V$$

relie le flux de $\vec{v}$ sur une surface $\mathcal{S}$ fermée (membre de gauche) à l'intégrale de la divergence de $\vec{v}$ sur le volume $\mathcal{V}$ délimité par cette surface (membre de droite). Dans cette expression, le cercle dans le symbole $\oiint$ indique que l'intégrale est calculée sur une surface fermée. Pour paraphraser la formule, les deux opérations suivantes donnent le même résultat (▶ **figure 2.2**) :

- d'une part, on se donne un volume $\mathcal{V}$ dans lequel se trouve un champ vectoriel, on évalue $\operatorname{div} \vec{v}$ en tout point de ce volume, puis on calcule l'intégrale volumique de cette quantité dans le volume $\mathcal{V}$ (membre de droite).
- d'autre part, on peut aussi calculer $\vec{v} \cdot \vec{n}$ en tout point de la surface $\mathcal{S}$ qui délimite $\mathcal{V}$ (où $\vec{n}$ désigne la normale à la surface, voir la **figure 2.2**), et évaluer l'intégrale surfacique de cette quantité (membre de gauche).

Le théorème de Green-Ostrogradsky indique qu'on trouve la même valeur dans les deux cas. Il ne faut pas se laisser impressionner par l'aspect technique de ce théorème, nous n'y ferons appel que dans des situations simples, dans lesquelles le calcul des intégrales est élémentaire, ou même dans des cas où on ne calcule même pas les intégrales ! Ce théorème permet notamment de démontrer le **théorème de Gauss** (▶ **chapitre 3**).

L'intégrale surfacique qui apparaît dans le terme de gauche de l'égalité précédente est appelée **le flux de $\vec{v}$ à travers la surface $\mathcal{S}$** (▶ **chapitre 3, section 3**).

Index

M

N

O

P

mémento sciences

ce qu'il faut VRAIMENT retenir !

1er cycle - prépas - concours

Une approche synthétique du cours d'électromagnétisme en moins de 104 pages !

Cet ouvrage a été conçu pour faciliter les révisions en rassemblant les idées-clés de l'électromagnétisme, avec :

- un texte clair et concis
- plus de 50 schémas explicatifs
- plusieurs « Focus » pour faire le point sur les notions les plus complexes

Ancien élève de l'ENS de Lyon en physique, docteur en physique théorique et agrégé de sciences physiques, Richard Taillet est aujourd'hui professeur à l'université de Savoie et chercheur en astrophysique au LAPTH (Laboratoire d'Annecy-le-Vieux de Physique Théorique).

ISBN : 978-2-8041-8176-5

9 782804 181765

ELECTROMEM

Conception graphique : Primo&Primo