MP-MP* 2e ANNÉE

Conforme au nouveau programme 2014

# ANALYSE

COURS
EXERCICES CORRIGÉS

OLIVIER RODOT

de boeck

# ANALYSE

**Collection Prépas scientifiques**
**Dirigée par Olivier Rodot**

N. BASBOIS et P. ABBRUGIATI, Algèbre. 1re année

C. ANTONINI, Algèbre. 2e année

G. COSTANTINI, Analyse. 1re année

O. RODOT, Analyse. 2e année.

**Chez le même éditeur**

C. JAN, Mathématiques. Une approche imagée et synthétique. 2e éd.

MP-MP* 2e ANNÉE

Conforme au nouveau programme 2014

# ANALYSE

COURS
EXERCICES CORRIGÉS

OLIVIER RODOT

de boeck

Pour toute information sur notre fonds et les nouveautés dans votre domaine de spécialisation, consultez notre site web: **www.deboeck.com**


1re édition
Fond Jean Pâques, 4 – 1348 Louvain-la-Neuve



Imprimé en Belgique

Dépôt légal:
Bibliothèque nationale, Paris : septembre 2014
Bibliothèque royale de Belgique, Bruxelles : 2014/0074/204
ISBN : 978-2-8041-8810-8

# Avant-propos

« La rigueur nécessaire à toute recherche va de pair avec l'élan poétique : j'ai autant de plaisir à déchiffrer des partitions de Chopin que des livres d'équations. Il y a une similitude étonnante entre cette musique qui rentre par une fenêtre, s'impose et disparaît et la résolution élégante d'une belle équation. »

Alain Connes

Ma passion des mathématiques remonte aux classes de première et terminale.

Je me rappelle avec émotion mon professeur de l'époque, Guy Boujard : il possédait cette faculté rare de susciter l'émerveillement devant une formule ou un théorème. Je le revois encore nous présenter, les yeux pétillants, la fonction Gamma d'Euler [1], qui généralise la fonction factorielle, et nous dévoiler toute son élégante beauté. Car on peut transposer aux mathématiques ce que l'un des fils de Bach souligne à propos du musicien [2] : « [un enseignant de mathématiques] ne pourra émouvoir sans être déjà lui-même ému. »

Dans ce livre, j'ai souhaité montrer qu'à l'opposé de leur réputation austère, les mathématiques nous content une histoire semée de rebondissements. J'ai donc pris soin, non seulement d'effectuer des recherches approfondies pour dater les théorèmes et indiquer leurs sources, mais aussi de présenter des notices biographiques relatives aux mathématiciens cités. J'espère ainsi réussir modestement à souligner que cette discipline constitue une langue véritablement vivante.

1. cf. définition p. 311.
2. cf. Carl Philipp Emanuel Bach, *Versuch über die wahre Art das Clavier zu spielen [...]*, Henning, Berlin (1753).

« La réalité mathématique n'est localisable ni dans l'espace, ni dans le temps. Lorsqu'on a la chance d'en dévoiler ne serait-ce qu'une infime partie, elle donne une sensation de jouissance extraordinaire par le sentiment d'intemporalité qui s'en dégage. »

Alain Connes

Mon expérience d'enseignant et les remarques judicieuses de mes étudiants m'ont amené à présenter, en amont de chaque chapitre, l'intérêt concret des notions abordées : il est plus aisé d'entamer un nouveau thème après s'être familiarisé avec certains concepts durant une brève introduction.

En outre, la clarté didactique a été une préoccupation permanente : les définitions et les théorèmes sont le plus souvent suivis d'un exemple ou d'une figure, les démonstrations étant soigneusement rédigées en n'omettant aucun détail. Je n'ai ainsi jamais cherché à exposer les preuves les plus courtes, certes éventuellement élégantes pour les initiés, mais souvent hermétiques pour les néophytes.

D'autre part, en marge du programme officiel, j'ai désiré exposer, toujours sous cette approche historique, des théorèmes plus difficiles ou moins connus, insérés le plus souvent dans les parties « compléments » des chapitres ou repérables facilement grâce aux conventions de couleurs. Ils sont destinés aux étudiants souhaitant un approfondissement des sujets classiques.

Enfin, les exercices, corrigés avec le même soin du détail, devraient permettre de vérifier l'assimilation des points clés de chaque chapitre.

## Remarque sur le nom des théorèmes

J'ai souhaité distinguer, aussi bien dans les différents chapitres que dans l'index, les théorèmes connus sous des noms célèbres de ceux *dus à* des mathématiciens mais pas connus sous leurs noms. Par exemple, le théorème *de* Weierstrass (p. 389) est bien connu sous ce nom tandis que le théorème 66 (p. 372) n'est pas connu sous le nom de théorème de Weierstrass mais peut néanmoins lui être attribué (cf. le guide de lecture ci-après pour se familiariser avec cette distinction).

## Remarques sur le nouveau programme MP-MP*

Bien que les séries de Fourier soient retirées du programme, il m'a semblé néanmoins judicieux de les traiter (en annexe) car la connaissance des concepts de ce chapitre est un atout non négligeable lors de l'entrée en écoles d'ingénieurs.

La section consacrée aux fonctions convexes figure déjà dans le livre d'analyse de première année [3].

Celle consacrée aux familles sommables, introduite dans le nouveau programme en vue de l'étude des probabilités, figurera dans l'ouvrage de probabilités de la même collection (parution en 2015).

Le chapitre sur les équations différentielles, intimement lié à l'algèbre linéaire et notamment la réduction des endomorphismes et des matrices carrées, est inséré dans l'ouvrage d'algèbre de deuxième année [4].

### Remerciements

Ce livre n'aurait sans doute pas été achevé sans la contribution de toutes les personnes qui m'ont aidé ou encouragé.

Je tiens à remercier tout d'abord vivement Cédric Peschard pour sa relecture patiente et très minutieuse de l'intégralité de l'ouvrage. Ses remarques, toujours très pertinentes, m'ont été très précieuses.

Je témoigne également ma profonde gratitude à Alexandre Duret-Lutz pour son apport considérable dans la réalisation de nombreuses figures complexes en LaTeX. Sa compétence dans la conception de figures 3D m'a été d'un grand secours.

J'exprime également toute ma reconnaissance à Guillaume Euvrard et Guillaume Goron, qui m'ont soutenu le dernier mois en me conseillant par exemple la présentation du modèle de Lotka-Volterra (dans l'introduction du chapitre consacré au calcul différentiel) et l'étude de certains beaux arcs paramétrés.

Je tiens également à remercier Jérôme Cartailler qui m'a facilité l'accès à certains articles ou ouvrages non numérisés, Jean Rodot pour ses conseils avisés sur la langue française, François Pantigny, à l'origine de beaucoup de macro-instructions et Alexandre Abraham pour l'insertion des caractères cyrilliques.

Enfin, un grand merci à mon épouse et mes enfants qui ont dû supporter une disponibilité bien réduite depuis des mois.

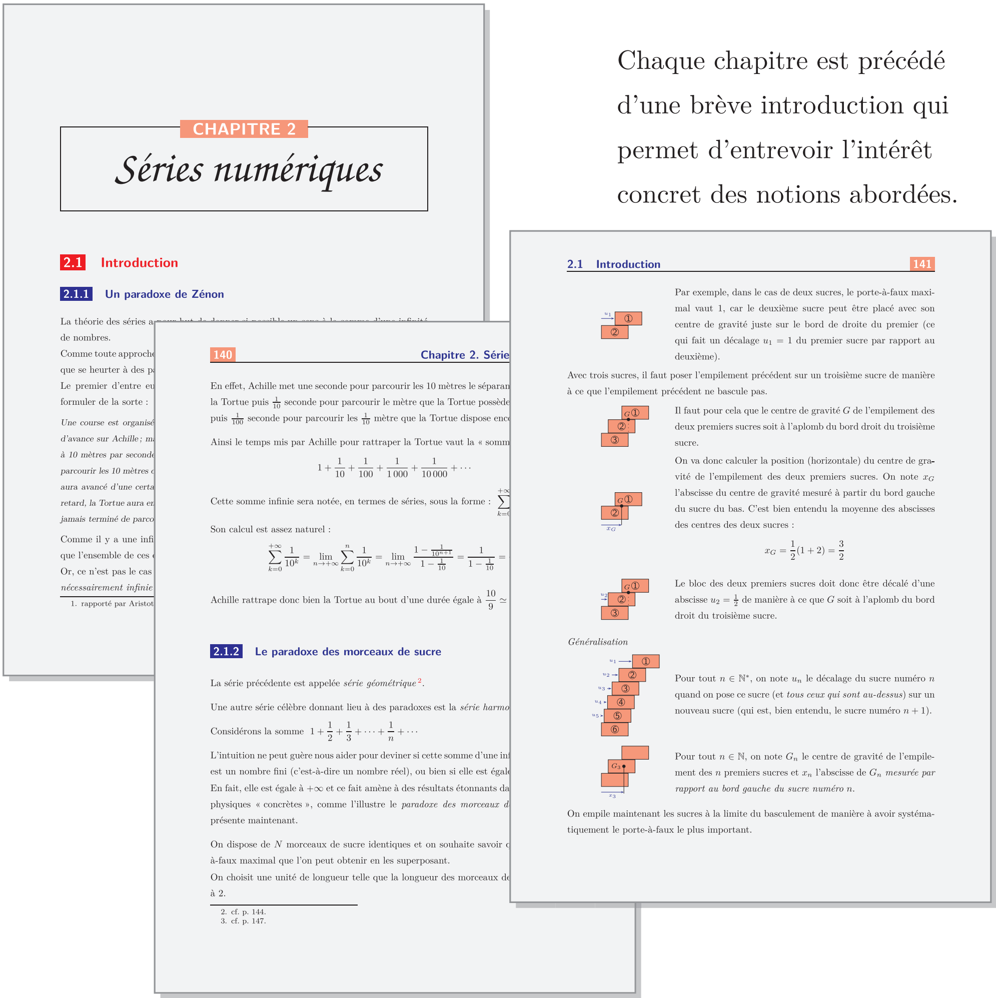
N'hésitez pas à me faire part de vos remarques sur cet ouvrage et ceux de la collection en m'envoyant un courrier électronique à l'adresse suivante : `rodot.livre.maths@gmail.com`

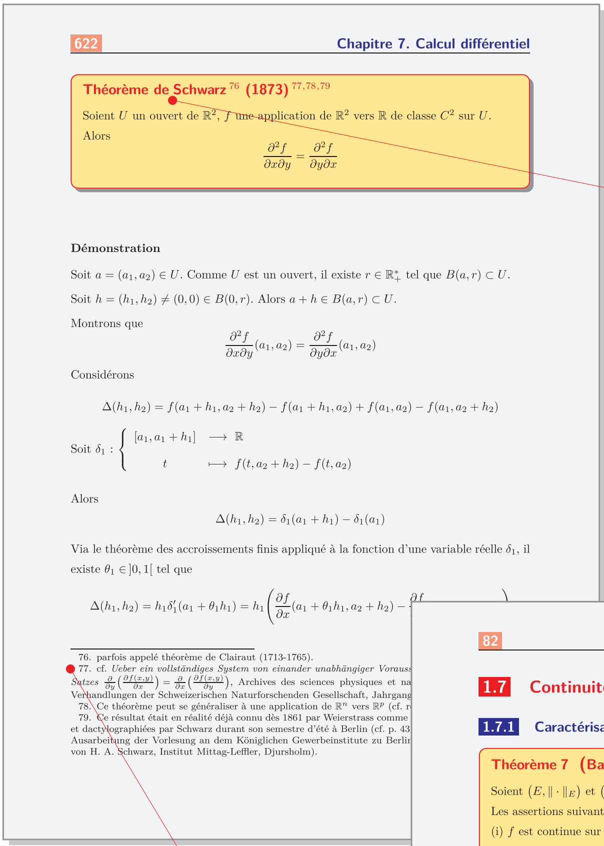
Olivier Rodot

3. cf. Costantini, *Analyse 1re année*, De Boeck (2013).
4. cf. Antonini, *Algèbre 2e année*, De Boeck (2014).

# *Guide de lecture*

Chaque chapitre est précédé d'une brève introduction qui permet d'entrevoir l'intérêt concret des notions abordées.





622 Chapitre 7. Calcul différentiel

**Théorème de Schwarz [76] (1873) [77,78,79]**

Soient $U$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f$ une application de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$ de classe $C^2$ sur $U$.
Alors
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

**Démonstration**

Soit $a = (a_1, a_2) \in U$. Comme $U$ est un ouvert, il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $B(a, r) \subset U$.

Soit $h = (h_1, h_2) \neq (0, 0) \in B(0, r)$. Alors $a + h \in B(a, r) \subset U$.

Montrons que
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a_1, a_2) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a_1, a_2)$$

Considérons
$$\Delta(h_1, h_2) = f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) - f(a_1 + h_1, a_2) + f(a_1, a_2) - f(a_1, a_2 + h_2)$$

Soit $\delta_1 : \left\{ \begin{array}{lcl} [a_1, a_1 + h_1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & f(t, a_2 + h_2) - f(t, a_2) \end{array} \right.$

Alors
$$\Delta(h_1, h_2) = \delta_1(a_1 + h_1) - \delta_1(a_1)$$

Via le théorème des accroissements finis appliqué à la fonction d'une variable réelle $\delta_1$, il existe $\theta_1 \in ]0, 1[$ tel que

$$\Delta(h_1, h_2) = h_1 \delta_1'(a_1 + \theta_1 h_1) = h_1 \left( \frac{\partial f}{\partial x}(a_1 + \theta_1 h_1, a_2 + h_2) - \frac{\partial f}{}\right.$$

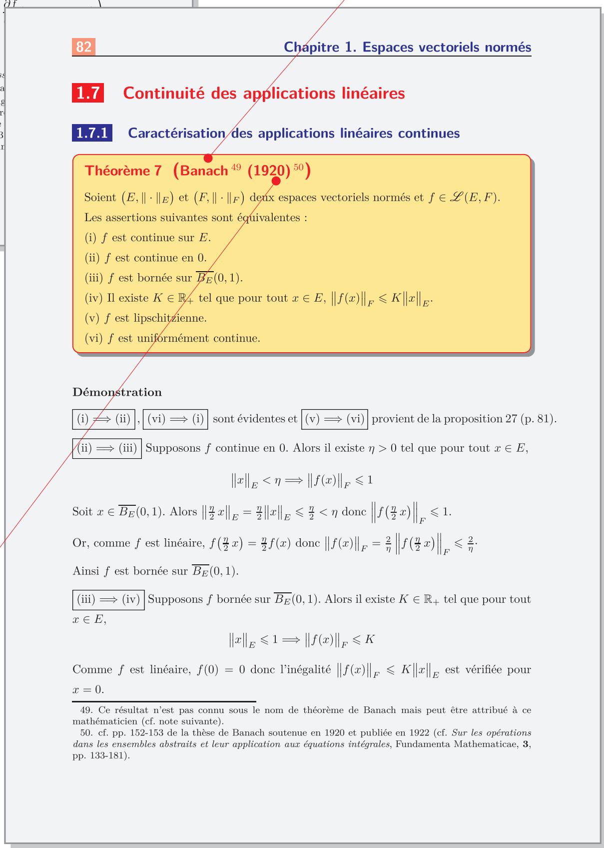
76. parfois appelé théorème de Clairaut (1713-1765).
77. cf. *Ueber ein vollständiges System von einander unabhängiger Vorauss* *Satzes* $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)$, Archives des sciences physiques et na Verhandlungen der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft, Jahrgang
78. Ce théorème peut se généraliser à une application de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^p$ (cf. r
79. Ce résultat était en réalité déjà connu dès 1861 par Weierstrass comme et dactylographiées par Schwarz durant son semestre d'été à Berlin (cf. p. 43 Ausarbeitung der Vorlesung an dem Königlichen Gewerbeinstitute zu Berlin von H. A. Schwarz, Institut Mittag-Leffler, Djursholm).

L'ouvrage distingue les théorèmes portant le nom d'un mathématicien et qui sont couramment appelés ainsi . . .

. . . des théorèmes qui peuvent être associés à un mathématicien sans pour autant avoir hérité de son nom dans l'usage.

Les références précises de l'article où le théorème est démontré sont données en notes de bas de page.

Pour chaque théorème est indiquée l'année de la publication (ou de la démonstration).



82 Chapitre 1. Espaces vectoriels normés

## 1.7 Continuité des applications linéaires

### 1.7.1 Caractérisation des applications linéaires continues

**Théorème 7 (Banach [49] (1920) [50])**

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés et $f \in \mathscr{L}(E, F)$.
Les assertions suivantes sont équivalentes :
(i) $f$ est continue sur $E$.
(ii) $f$ est continue en 0.
(iii) $f$ est bornée sur $\overline{B_E}(0, 1)$.
(iv) Il existe $K \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $x \in E$, $\|f(x)\|_F \leqslant K\|x\|_E$.
(v) $f$ est lipschitzienne.
(vi) $f$ est uniformément continue.

**Démonstration**

$\boxed{\text{(i)} \Longrightarrow \text{(ii)}}$, $\boxed{\text{(vi)} \Longrightarrow \text{(i)}}$ sont évidentes et $\boxed{\text{(v)} \Longrightarrow \text{(vi)}}$ provient de la proposition 27 (p. 81).

$\boxed{\text{(ii)} \Longrightarrow \text{(iii)}}$ Supposons $f$ continue en 0. Alors il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in E$,
$$\|x\|_E < \eta \Longrightarrow \|f(x)\|_F \leqslant 1$$

Soit $x \in \overline{B_E}(0, 1)$. Alors $\left\|\frac{\eta}{2} x\right\|_E = \frac{\eta}{2}\|x\|_E \leqslant \frac{\eta}{2} < \eta$ donc $\left\|f\left(\frac{\eta}{2} x\right)\right\|_F \leqslant 1$.

Or, comme $f$ est linéaire, $f\left(\frac{\eta}{2} x\right) = \frac{\eta}{2} f(x)$ donc $\|f(x)\|_F = \frac{2}{\eta}\left\|f\left(\frac{\eta}{2} x\right)\right\|_F \leqslant \frac{2}{\eta}$.

Ainsi $f$ est bornée sur $\overline{B_E}(0, 1)$.

$\boxed{\text{(iii)} \Longrightarrow \text{(iv)}}$ Supposons $f$ bornée sur $\overline{B_E}(0, 1)$. Alors il existe $K \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $x \in E$,
$$\|x\|_E \leqslant 1 \Longrightarrow \|f(x)\|_F \leqslant K$$

Comme $f$ est linéaire, $f(0) = 0$ donc l'inégalité $\|f(x)\|_F \leqslant K\|x\|_E$ est vérifiée pour $x = 0$.

49. Ce résultat n'est pas connu sous le nom de théorème de Banach mais peut être attribué à ce mathématicien (cf. note suivante).
50. cf. pp. 152-153 de la thèse de Banach soutenue en 1920 et publiée en 1922 (cf. *Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales*, Fundamenta Mathematicae, **3**, pp. 133-181).

Des notices biographiques, minutieusement documentées, jalonnent l'ouvrage et permettent de replacer les théorèmes dans leur contexte historique.



**Henri Lebesgue**
(1875–1941)

Issu d'un milieu très modeste, fils d'un compositeur typographe de Beauvais (décédé prématurément en 1879 dans sa trente-sixième année), Henri Lebesgue se révèle très brillant élève dès l'école primaire. Grâce à l'action du maire de sa ville natale, il obtient des bourses lui permettant de poursuivre ses classes préparatoires dans de grands lycées parisiens. Il intègre l'École normale supérieure en 1894 et en sort agrégé en 1897. Il révolutionne l'histoire de l'analyse en publiant en 1901 son article *Sur une généralisation de l'intégrale définie*[a]. Il définit une nouvelle intégrale, appelée désormais *intégrale de Lebesgue*, généralisant celle de Riemann[b]. Il donne en particulier dans cet article un exemple de fonction non intégrable au sens de Riemann mais intégrable[c] avec sa nouvelle définition. Ce qui n'était encore qu'une esquisse en 1901 aboutit l'année suivante, lors de la soutenance de sa thèse, à sa magistrale *théorie de la mesure*[d]. Il poursuit ses travaux sur l'intégration et montre en 1904[e] que son intégrale est un outil à la fois puissant et souple pour « permuter limite et intégrale[f] ». Malgré la richesse de ses résultats, il n'obtient pas immédiatement de poste dans la capitale : après un passage dans un lycée de Nancy durant lequel il rédige sa thèse, il est nommé en 1902 à la faculté des sciences de Rennes puis en 1906 à celle de Poitiers. Il obtient finalement sa nomination à la Sorbonne en 1910 puis au prestigieux Collège de France de 1921 à son décès. L'année suivante, il devient membre de l'Académie des sciences. Ses travaux de recherche couvre notamment les séries de Fourier[g] et beaucoup de thèmes de géométrie comme les coniques[h] ou les constructions géométriques[i]. Quelques jours après son décès, Paul Montel (1876-1975) lui rend hommage[j] à l'Académie des sciences. Il conclut par ses mots : « Humain, profondément humain, il avait une grande noblesse de cœur et de pensée, une sensibilité délicate, une générosité discrète et inépuisable. [...] Sa mort prive notre pays d'un de ses grands ouvriers de la pensée. Elle prive d'un homme de bien tous ceux qui l'ont approché. »

*a*. cf. Comptes rendus de l'Académie des sciences, **132**, pp. 1025-1028.
*b*. cf. notice biographique p. 153.
*c*. Il emploie le terme « sommable ».
*d*. Cette thèse a été publiée la même année sous le titre *Intégrale, Longueur, Aire*, Annali di Matematica pura ed applicata, **7**, pp. 231-359.
*e*. cf. *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*, Gauthier-Villars, Paris.
*f*. cf. *théorème de convergence dominée* p. 441.
*g*. cf. Leçons sur les séries trigonométriques, Gauthier-Villars, Paris (1906).
*h*. cf. *Les coniques*, Gauthier-Villars, Paris (1942).
*i*. cf. *Leçons sur les constructions géométriques*, Gauthier-Villars, Paris (1950).
*j*. cf. Notice nécrologique sur M. Henri Lebesgue, Comptes rendus de l'Académie des sciences, **213**, pp. 197-200 (1941).

**Démonstration (du lemme 22)**

Soit pour tout $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n \leqslant m$ la fonction $F_{n,m}$ définie pour tout $x \in [a,b[$ par

$$F_{n,m}(x) = \operatorname*{Max}_{k \in [\![n,m]\!]} f_k(x)$$

## 4.3 Propriétés de la convergence uniforme

Donc $(f_n)$ converge uniformément vers $f$ sur $[a,b]$.

**Remarque**

Toutes les hypothèses du théorème de Dini sont cruciales : il c
hypothèses est retirée ou modifiée.

- Soit $(f_n) \in \left(\mathbb{R}^{[0,1[}\right)^{\mathbb{N}}$ où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : \left\{ \begin{array}{lcl} [0,1[ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x \end{array} \right.$

  Chaque $(f_n)$ est croissante sur $[0,1[$, $(f_n)$ converge simplement v
  nulle sur $[0,1[$ mais la convergence n'est pas uniforme sur $[0,1[$ car $\displaystyle\operatorname*{Sup}_{x \in [0,1[} |f_n(x)| = 1$.

- Reprenons le même exemple ci-dessus mais sur $[0,1]$.

  Alors chaque $(f_n)$ est croissante sur $[0,1]$, $(f_n)$ converge simplement sur $[0,1]$ vers $f : \left\{ \begin{array}{lcl} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } x \neq 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{array} \right. \end{array} \right.$ mais la convergence n'est pas uniforme.

- L'exemple de l'observation p. 367 prouve enfin que l'hypothèse de croissance de chaque $f_n$ est indispensable.

**Théorème de Dini[33] (1878)[34]**

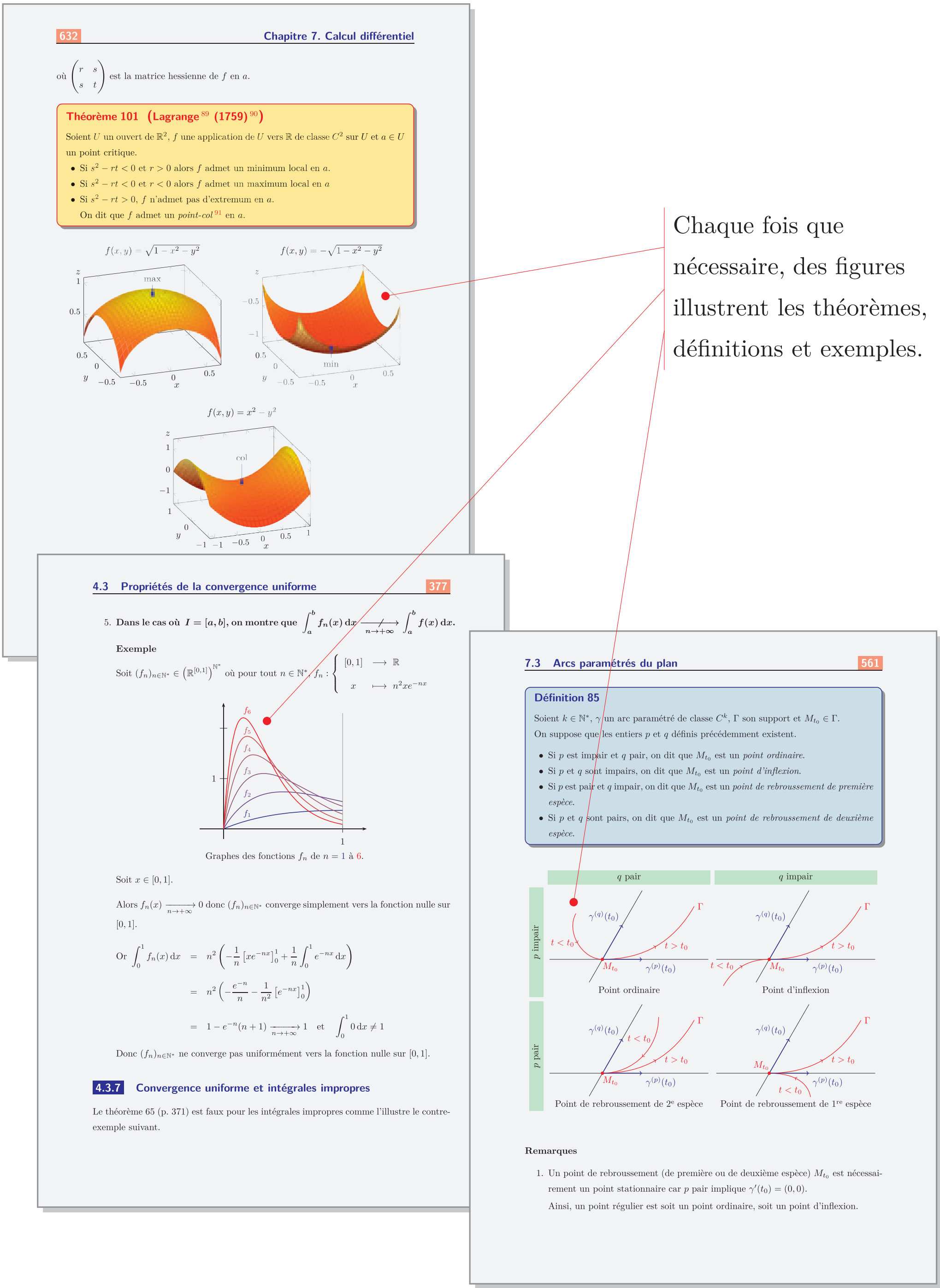
Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $(f_n) \in \left(\mathbb{R}^{[a,b]}\right)^{\mathbb{N}}$ et $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ telles que

- $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n$ est continue sur $[a,b]$
- la suite $(f_n)$ est monotone[35,36]
- $(f_n)$ converge simplement vers $f$ sur $[a,b]$
- $f$ continue sur $[a,b]$

Alors $(f_n)$ converge uniformément vers $f$ sur $[a,b]$.

33. cf. notice biographique p. 231.
34. cf. *Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali*, T. Nistri, Pisa, p. 110.
35. c'est-à-dire que la suite $(f_n)$ est croissante (ou décroissante) : pour tout $x \in [a,b]$, la suite $\big(f_n(x)\big)$ est croissante (ou décroissante).
36. Ne pas confondre une *suite croissante* de fonctions avec une suite de *fonctions croissantes* comme dans le premier théorème de Dini (p. 381).

Les théorèmes moins connus ou plus difficiles sont repérables par leur fond rose.





où $\begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$ est la matrice hessienne de $f$ en $a$.

**Théorème 101 (Lagrange[89] (1759)[90])**

Soient $U$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f$ une application de $U$ vers $\mathbb{R}$ de classe $C^2$ sur $U$ et $a \in U$ un point critique.

- Si $s^2 - rt < 0$ et $r > 0$ alors $f$ admet un minimum local en $a$.
- Si $s^2 - rt < 0$ et $r < 0$ alors $f$ admet un maximum local en $a$
- Si $s^2 - rt > 0$, $f$ n'admet pas d'extremum en $a$.
  On dit que $f$ admet un *point-col*[91] en $a$.





5. **Dans le cas où $I = [a, b]$, on montre que $\int_a^b f_n(x)\,dx \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} \int_a^b f(x)\,dx$.**

**Exemple**

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \left(\mathbb{R}^{[0,1]}\right)^{\mathbb{N}^*}$ où pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : \begin{cases} [0,1] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto n^2 x e^{-nx} \end{cases}$



Graphes des fonctions $f_n$ de $n = 1$ à $6$.

Soit $x \in [0, 1]$.

Alors $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers la fonction nulle sur $[0, 1]$.

$$\begin{aligned} \text{Or } \int_0^1 f_n(x)\,dx &= n^2\left(-\frac{1}{n}\left[xe^{-nx}\right]_0^1 + \frac{1}{n}\int_0^1 e^{-nx}\,dx\right) \\ &= n^2\left(-\frac{e^{-n}}{n} - \frac{1}{n^2}\left[e^{-nx}\right]_0^1\right) \\ &= 1 - e^{-n}(n+1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \quad \text{et} \quad \int_0^1 0\,dx \neq 1 \end{aligned}$$

Donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas uniformément vers la fonction nulle sur $[0, 1]$.

**4.3.7 Convergence uniforme et intégrales impropres**

Le théorème 65 (p. 371) est faux pour les intégrales impropres comme l'illustre le contre-exemple suivant.



**Définition 85**

Soient $k \in \mathbb{N}^*$, $\gamma$ un arc paramétré de classe $C^k$, $\Gamma$ son support et $M_{t_0} \in \Gamma$.
On suppose que les entiers $p$ et $q$ définis précédemment existent.

- Si $p$ est impair et $q$ pair, on dit que $M_{t_0}$ est un *point ordinaire.*
- Si $p$ et $q$ sont impairs, on dit que $M_{t_0}$ est un *point d'inflexion.*
- Si $p$ est pair et $q$ impair, on dit que $M_{t_0}$ est un *point de rebroussement de première espèce.*
- Si $p$ et $q$ sont pairs, on dit que $M_{t_0}$ est un *point de rebroussement de deuxième espèce.*



**Remarques**

1. Un point de rebroussement (de première ou de deuxième espèce) $M_{t_0}$ est nécessairement un point stationnaire car $p$ pair implique $\gamma'(t_0) = (0, 0)$.
   Ainsi, un point régulier est soit un point ordinaire, soit un point d'inflexion.

Chaque fois que nécessaire, des figures illustrent les théorèmes, définitions et exemples.

**Proposition 101**

Soit $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{N}$[44]. Alors la fonction $x \longmapsto (1+x)^\alpha$ est développable en série entière sur $]-1,1[$ et pour tout $x \in ]-1,1[$, on a

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$$

**Démonstration**

Soit $f : x \longmapsto (1+x)^\alpha$. Alors $f$ est de classe $C^\infty$ sur $]-1,+\infty[$.

De plus, pour tout $x \in ]-1,+\infty[$, $f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$ soit encore

$$(1+x)f'(x) = \alpha f(x)$$

Ainsi, en remarquant que $f(0) = 1$, $f$ est l'unique solution[45] de l'équation différentielle

$$(1+x)y'(x) = \alpha y(x) \qquad (*)$$

avec la condition initiale $y(0) = 1$.

Raisonnons à présent par analyse-synthèse.

- Analyse.

Supposons $f$ développable en série entière sur $]-R,R[$ où $R \in \mathbb{R}_+^*$.

Alors, pour tout $x \in ]-R,R[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Ainsi $f$ solution de l'équation $(*)$ ssi

$$(1+x)\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

c'est-à-dire ssi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n = \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

Les démonstrations, très soignées, n'omettent aucune étape dans un souci de clarté.



Ainsi, après un changement d'indice dans la première somme et en remarquant que le terme pour $n = 0$ est nul dans la deuxième somme, $f$ est solution de l'équation $(*)$ ssi

$$\sum_{n=0}^{+\infty} ((n+1)a_{n+1} + (n-\alpha)a_n)x^n = 0$$

Donc, via la remarque p. 502, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+1)a_{n+1} + (n-\alpha)a_n = 0$ c'est-à-dire $a_{n+1} = \frac{\alpha - n}{n+1} a_n$ avec $a_0 = 1$.

Ainsi

$$a_{n+1} = \frac{(\alpha-n)}{n+1}\,\frac{(\alpha-(n-1))}{n}\cdots\frac{\alpha}{1}a_0$$

soit encore, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$a_n = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$$

Donc si $f$ est développable en série entière sur $]-R,R[$, alors pour tout $x \in ]-R,R[$,

$$f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$$

- Synthèse.

Soit la série entière $\sum a_n x^n$ où $a_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$.

Il suffit à présent de montrer que le rayon de convergence $R$ de cette série est égal à 1. En effet, si c'est le cas, la partie analyse a montré que sur $]-R,R[$, sa somme est égale à $f$.

Comme $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{|\alpha-n|}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, via le théorème 80 (p. 479), $R = 1$.

Donc $f$ est développable en série entière sur $]-1,1[$ et pour tout $x \in ]-1,1[$, on a

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$$

## 6.7 Fonction exponentielle complexe

L'étude générale des fonctions de variable complexe n'est pas au programme des classes préparatoires.

Nous proposons, dans cette section, de présenter uniquement la fonction exponentielle complexe.

Des exercices corrigés sont proposés à la fin de chaque chapitre. Les énoncés sont repérables par leur fond coloré.



donc pour tout $x \in ]-1,1[$, on a

$$\begin{aligned}\arcsin(x) &= \arcsin(0) + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\cdot\frac{1}{2n+1}x^{2n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\cdot\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}\end{aligned}$$

**6.10**

Déterminer le développement en série entière (en 0) sur $]-1,1[$ de la fonction

$$x \longmapsto \ln(x^2 - x\sqrt{2} + 1)$$

**C 6.10**

Notons $f : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \ln(x^2 - x\sqrt{2} + 1) \end{cases}$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{2x - \sqrt{2}}{x^2 - x\sqrt{2} + 1}$.

Soit la fraction rationnelle $F = \frac{2X - \sqrt{2}}{X^2 - X\sqrt{2} + 1}$.

La partie entière de $F$ est nulle.

Les pôles de $F$ dans $\mathbb{C}$ sont $e^{i\pi/4}$ et $e^{-i\pi/4}$.

Via une décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$, on a

$$F = \frac{2X - \sqrt{2}}{(X - e^{i\pi/4})(X - e^{-i\pi/4})} = \frac{1}{X - e^{i\pi/4}} + \frac{1}{X - e^{-i\pi/4}}$$

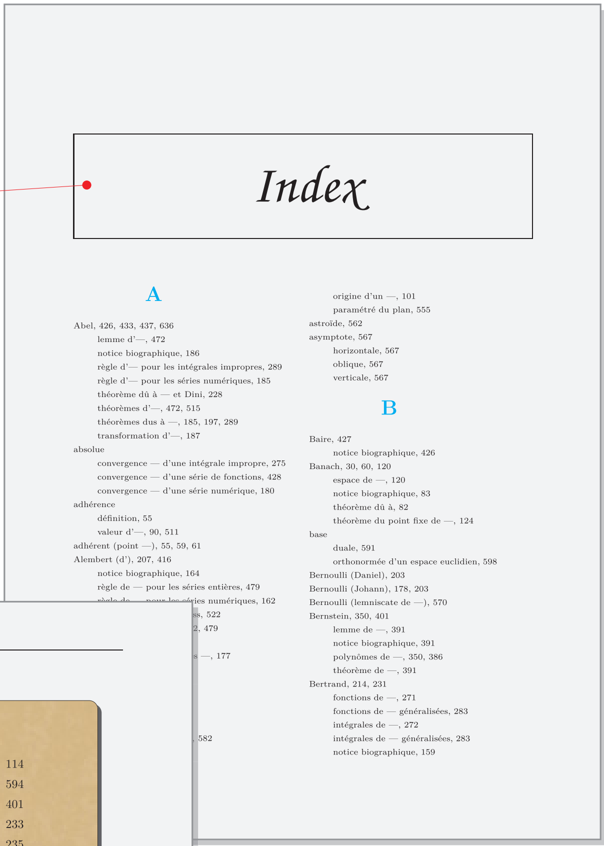
Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \frac{1}{x - e^{i\pi/4}} + \frac{1}{x - e^{-i\pi/4}} \qquad (*)$$

Or pour tout $x \in ]-1,1[$,

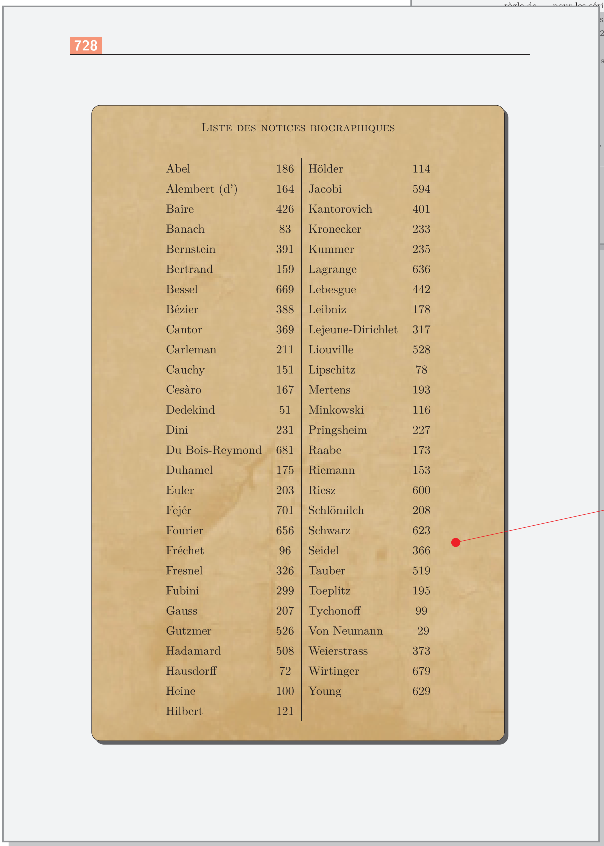
$$\frac{1}{x - e^{i\pi/4}} = \frac{-1}{e^{i\pi/4} - x} = \frac{-e^{-i\pi/4}}{1 - xe^{-i\pi/4}} = -e^{-i\pi/4}\sum_{n=0}^{+\infty}(e^{-i\pi/4}x)^n = -\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-i(n+1)\pi/4}x^n$$

Un index détaillé permet de retrouver aisément toute notion traitée.



# Index







Liste des notices biographiques



Une liste des notices biographiques est donnée avant l'index.

# Table des matières

# CHAPITRE 1
# *Espaces vectoriels normés*

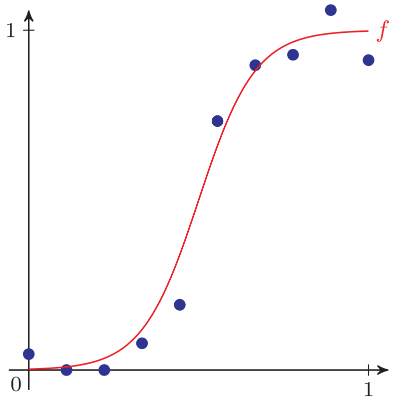
Dans tout ce chapitre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

## 1.1 Introduction

Dans un espace vectoriel $E$, il peut être utile de quantifier l'écart entre deux vecteurs $u$ et $v$. Cet écart se mesure naturellement dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ par la norme euclidienne de la différence $u - v$. Cette norme euclidienne se généralise aisément dans $\mathbb{R}^p$ pour tout entier $p$. Mais il est souvent nécessaire de mesurer la distance entre deux vecteurs d'un espace vectoriel *quelconque*.

En particulier, si $E$ est l'espace des fonctions continues d'un segment $[a, b]$ vers $\mathbb{R}$ et si $f$ appartient à $E$, on peut avoir besoin d'approcher $f$ par une autre fonction $g$ et d'évaluer la qualité de cette approximation.
Supposons par exemple que l'on cherche à étalonner un anémomètre. Cet instrument est constitué d'une hélice qui tourne sous la force du vent. Si elle est couplée à une dynamo, l'hélice en rotation crée un courant électrique dont la mesure indique la vitesse du vent. Encore faut-il connaître la relation entre ces deux variables. On suppose donc qu'il existe une fonction $y = f(x)$ où $x$ désigne la vitesse du vent et $y$ l'intensité électrique mesurée, mais que cette fonction est inconnue. L'étalonnage de l'instrument consiste alors à utiliser un ensemble de mesures $\big\{(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)\big\}$ de ces deux variables pour construire une

estimation $g$ de la fonction $f$. Si cette approximation est de bonne qualité, toute nouvelle mesure $y$ de l'intensité électrique peut être traduite en une mesure $x$ de la vitesse du vent par inversion de $g$.



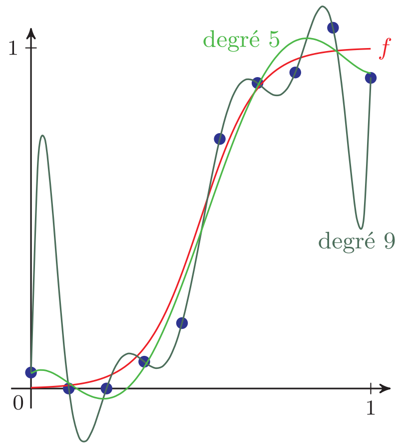

La figure ci-dessus montre le graphe de cette vraie fonction $f$ (inconnue) ainsi qu'un ensemble de dix points $\{(x_1, y_1), \ldots, (x_{10}, y_{10})\}$ servant à l'étalonnage. Comme souvent dans la vie expérimentale, ces points sont sujets à des bruits de mesures, c'est-à-dire qu'ils ne se situent pas exactement sur le graphe de la fonction $f$. Si on n'a pas d'idée pré-établie de la forme analytique de la vraie fonction $f$, on peut vouloir l'approcher par un polynôme : on en fixe le degré (par exemple 2) ; l'estimation $g$ a donc la forme

$$g(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

et, pour une valeur donnée des coefficients $(a_0, a_1, a_2)$, on définit la fonction $E$ d'erreur du modèle en $(a_0, a_1, a_2)$ sur les points d'étalonnage par

$$\begin{aligned} E(a_0, a_1, a_2) &= \sum_{k=1}^{n} \big(g(x_k) - y_k\big)^2 \\ &= \sum_{k=1}^{n} \big(a_0 + a_1 x_k + a_2 x_k^2 - y_k\big)^2 \end{aligned}$$

On peut alors obtenir une estimation de $f$ en donnant aux coefficients la valeur $\left(a_0^*, a_1^*, a_2^*\right)$ qui minimise la fonction $E$.




La figure ci-dessus montre les estimations obtenues en choisissant des polynômes de degrés 5 et 9. Elle conduit à deux observations :

- L'estimation par un polynôme de degré 9 a une meilleure performance vis-à-vis des points d'étalonnage, puisqu'elle passe exactement par ceux-ci.
- Néanmoins, l'estimation par un polynôme de degré 5 est de meilleure qualité vis-à-vis de la fonction $f$ : à l'œil nu, son graphe est en effet plus proche de celui de $f$ sur l'ensemble du domaine.

Cet exemple fait apparaître la nécessité de quantifier l'écart global entre deux fonctions $f$ et $g$ : le polynôme doit être choisi ici, non en fonction de la qualité de l'estimation sur les $n$ exemples, mais sur tout le domaine de définition.

Cette quantification de l'écart entre deux fonctions peut être réalisée par des normes.

Une norme sur un espace vectoriel $E$ est une application $\|\cdot\| \quad : \quad \begin{cases} E & \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ u & \longmapsto \|u\| \end{cases}$ possédant de bonnes propriétés, comme d'être toujours positive et de ne s'annuler que quand $u = 0$. Ces propriétés, qui doivent être vérifiées par toute norme, ont été choisies de façon à pouvoir envisager $\|u - v\|$ comme une distance entre deux vecteurs $u$ et $v$.

Ainsi, quand $E$ est l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0, 1]$ vers $\mathbb{R}$, les normes les plus communes sont

$$\begin{cases} \|f - g\|_1 = \displaystyle\int_0^1 |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x \\ \|f - g\|_2 = \sqrt{\displaystyle\int_0^1 \big(f(x) - g(x)\big)^2\,\mathrm{d}x} \\ \|f - g\|_\infty = \displaystyle\operatorname*{Sup}_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)| \end{cases}$$

Toutes permettent de définir un écart global entre deux fonctions $f$ et $g$.

Dans le cas de l'étalonnage de l'anémomètre vu plus haut, on ne sait pas évaluer $\|f-g\|_\infty$ à partir d'un ensemble fini de $n$ points : cette norme ne dépend que *d'une seule valeur* de $|f-g|$, celle prise au point $x^*$ en lequel $|f-g|$ est maximale ; si $x^*$ ne fait pas partie des points d'étalonnage $x_i$, les $\big|y_i-g(x_i)\big|$ ne suffisent pas à évaluer avec précision $\big|f(x^*)-g(x^*)\big|$.

En revanche, les normes $\|f-g\|_1$ et $\|f-g\|_2$ sont basées, non pas sur une valeur *unique* mais sur des *moyennes* de $\big|f(x)-g(x)\big|$ et $\big(f(x)-g(x)\big)^2$.

Ainsi les statisticiens peuvent estimer ces normes à partir d'un ensemble fini de $n$ points d'étalonnage, avec d'autant plus de précision que le nombre $n$ est grand. Cela permet de construire une estimation polynomiale $g_n$ de $f$ à partir de n points d'étalonnage : on choisit pour $g_n$ le polynôme qui minimise l'estimation à $n$ points de $\|f-g\|_2$. De plus, cette procédure garantit que

$$\lim_{n\to+\infty}\|g_n-f\|_2=0$$

# 1.2 Définitions

## 1.2.1 Espace préhilbertien réel

Cette section a pour but de rappeler succinctement quelques définitions et résultats sur les espaces préhibertiens réels[1].

**Définition 1**

Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On appelle *forme bilinéaire* sur $E$ toute application $\varphi : E\times E \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

- pour tout $x\in E$, l'application $y\longmapsto\varphi(x,y)$ est linéaire ;
- pour tout $y\in E$, l'application $x\longmapsto\varphi(x,y)$ est linéaire.

1. Pour plus de détails, cf. Antonini, *Algèbre 2e année*, De Boeck (2014).

**Remarque**

Si $\varphi$ est une forme bilinéaire sur $E$, on a donc, pour tout $(x, y, z, t) \in E^4$ et tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$,

$$\varphi(x + \lambda y, z + \mu t) = \varphi(x, z) + \mu\varphi(x, t) + \lambda\varphi(y, z) + \lambda\mu\varphi(y, t)$$

**Exemples**

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $E = \mathbb{R}^n$ et $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n)$ dans $E$ par

$$\varphi(x, y) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$

   Alors $\varphi$ est une forme bilinéaire sur $E$.

   En effet, soient $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$, $z = (z_1, \ldots, z_n)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \text{Alors } \varphi(x, y + \lambda z) &= \sum_{k=1}^{n} x_k\big(y_k + \lambda z_k\big) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k + \lambda x_k z_k \\ &= \sum_{k=1}^{n} x_k y_k + \lambda \sum_{k=1}^{n} x_k z_k \\ &= \varphi(x, y) + \lambda\varphi(x, z) \end{aligned}$$

   De même $\varphi(x + \lambda y, z) = \varphi(x, z) + \lambda\varphi(y, z)$.

2. Soient $E$ l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $(f, g) \in E^2$ par

$$\varphi(f, g) = \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

   Alors $\varphi$ est une forme bilinéaire sur $E$.

   En effet, soient $(f, g, h) \in E^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \text{Alors } \varphi(f, g + \lambda h) &= \int_0^1 f(t)\big(g + \lambda h\big)(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 f(t)g(t) + \lambda f(t)h(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t + \lambda \int_0^1 f(t)h(t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Donc $\varphi(f, g+\lambda h) = \varphi(f,g) + \lambda\varphi(f,h)$.

De même $\varphi(f+\lambda g, h) = \varphi(f,h) + \lambda\varphi(g,h)$.

3. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace des matrices carrées d'ordre $n$ à coefficients réels et $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $(A,B) \in E^2$ par

$$\varphi(A,B) = \operatorname{tr}\big(A^T B\big)$$

où $A^T$ est la transposée de la matrice $A$.

Alors $\varphi$ est une forme bilinéaire sur $E$.

En effet, soient $(A,B,C) \in E^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \text{Alors } \varphi(A, B+\lambda C) &= \operatorname{tr}\big(A^T(B+\lambda C)\big) = \operatorname{tr}\big(A^T B + \lambda A^T C\big) \\ &= \operatorname{tr}\big(A^T B\big) + \lambda \operatorname{tr}\big(A^T C\big) \\ &= \varphi(A,B) + \lambda\varphi(A,C) \end{aligned}$$

De même $\varphi(A+\lambda B, C) = \varphi(A,C) + \lambda\varphi(B,C)$.

## Définition 2

Soient $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $\varphi$ une forme bilinéaire sur $E$. On dit que $\varphi$ est *symétrique* si pour tout $(x,y) \in E^2$, $\varphi(x,y) = \varphi(y,x)$.

**Exemples**

En reprenant les deux premiers exemples précédents, $\varphi$ est bien entendu symétrique. Quant au troisième exemple, $\varphi$ est également symétrique car pour tout $(A,B) \in E^2$, $\varphi(A,B) = \operatorname{tr}\big(A^T B\big) = \operatorname{tr}\big((A^T B)^T\big) = \operatorname{tr}\big(B^T A\big) = \varphi(B,A)$.

## Définition 3

Soient $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $\varphi$ une forme bilinéaire symétrique sur $E$. On dit que $\varphi$ est un *produit scalaire* sur $E$ si $\varphi$ est de plus positive et définie c'est-à-dire si

- pour tout $x \in E$, $\varphi(x,x) \geqslant 0$ ;
- pour tout $x \in E$, $\varphi(x,x) = 0 \Longrightarrow x = 0$.

**Remarque**

Si $\varphi$ est une forme bilinéaire sur $E$, on a toujours $\varphi(0,0) = 0$ car pour tout $x \in E$, $\varphi(0,0) = \varphi(0x,0) = 0\,\varphi(x,0) = 0$.

**Exemples**

1. Reprenons le premier exemple p. 25. On a déjà vu que $\varphi$ est une forme bilinéaire symétrique. Montrons qu'elle est positive et définie.

   Soit $x = (x_1,\ldots,x_n) \in E$. Alors $\varphi(x,x) = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2 \geqslant 0$ donc $\varphi$ est positive.

   De plus si $\varphi(x,x) = 0$ alors pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $x_k^2 = 0$ donc $x = 0$ et $\varphi$ est donc définie d'où $\varphi$ est un produit scalaire sur $E$.

2. Reprenons le deuxième exemple p. 25. On a déjà vu que $\varphi$ est une forme bilinéaire symétrique. Montrons qu'elle est positive et définie.

   Soit $f \in E$.

   Alors, comme $f^2$ est positive sur $[0,1]$, $\varphi(f,f) = \displaystyle\int_0^1 f^2(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$. Donc $\varphi$ est positive.

   De plus si $\varphi(f,f) = 0$ alors, comme $f^2$ est positive sur $[0,1]$, pour tout $t \in [0,1]$, $f^2(t) = 0$ donc $f = 0$. Ainsi $\varphi$ est définie et est donc un produit scalaire sur $E$.

3. Reprenons le troisième exemple p. 26. On a déjà vu que $\varphi$ est une forme bilinéaire symétrique. Montrons qu'elle est positive et définie.

   Soit $A = (a_{ij}) \in E$.

   Montrons que $\varphi(A,A) = \mathrm{tr}\big(A^T A\big) \geqslant 0$.

   $A^T A = (b_{ij})$ où pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $b_{ij} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{ki}a_{kj}$.

   Donc $\varphi(A,A) = \mathrm{tr}\big(A^T A\big) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} b_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ki}^2 \geqslant 0$ et $\varphi$ est donc positive.

   Supposons à présent $\varphi(A,A) = 0$. Alors pour tout $(i,k) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{ki}^2 = 0$ donc $A = 0$ et $\varphi$ est donc définie.

**Définition 4**

On appelle *espace préhilbertien réel*[2] tout $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire. On appelle *espace euclidien* tout $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire.

**Remarque**

Lorsque $(E, \varphi)$ est un espace préhilbertien réel, on notera souvent $\langle \mid \rangle$ à la place de $\varphi$.

### 1.2.2 Inégalité de Cauchy-Schwarz

**Théorème 1 (inégalité de Cauchy[3]-Schwarz[4] (1927)[5])**

Soient $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $\varphi$ une forme bilinéaire symétrique positive[6] sur $E$. Alors pour tout $(x,y) \in E^2$, on a[7]

$$\big|\varphi(x,y)\big| \leqslant \sqrt{\varphi(x,x)}\sqrt{\varphi(y,y)}$$

**Démonstration**

Soit $(x,y) \in E^2$. Comme $\varphi$ est positive, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\varphi(x+ty, x+ty) \geqslant 0$.

Or, comme $\varphi$ est bilinéaire symétrique,

$$\varphi(x+ty, x+ty) = \varphi(y,y)t^2 + 2t\varphi(x,y) + \varphi(x,x)$$

Comme, pour tout $t \in \mathbb{R}$, ce trinôme du second degré en $t$ est positif, son discriminant $\Delta$ est négatif ou nul[8]. Or

$$\Delta = 4\big(\varphi(x,y)\big)^2 - 4\varphi(x,x)\varphi(y,y)$$

donc $\Delta \leqslant 0$ implique bien l'inégalité souhaitée.

---

2. en hommage à David Hilbert. Cf. également la définition d'un espace de Hilbert p. 120 et notice biographique p. 121.
3. cf. notice biographique p. 151.
4. cf. notice biographique p. 623.
5. Ce théorème, connu sous le nom d'*inégalité de Cauchy-Schwarz* ou parfois d'*inégalité de Bouniakowsky*, a été démontré dans des cas particuliers par trois mathématiciens : Cauchy démontre cette inégalité pour des familles de réels en 1821 (cf. *Cours d'analyse de l'École royale polytechnique*, Debure, Paris, p. 454), Bouniakowsky la démontre pour les intégrales en 1859 (cf. p. 4 dans *Sur quelques inégalités concernant les intégrales ordinaires et les intégrales aux différences finies*, Mémoires de l'Académie Impériale des sciences de St-Pétersbourg (VII), **1**, n°9, pp. 1-18) et Schwarz pour les intégrales doubles en 1885, mais publié seulement en 1888 (cf. p. 344 dans *Ueber ein die Flächen kleinsten Flächeninhalts betreffendes Problem der Variationsrechnung*, Acta Societatis scientiarum Fennicae, **15**, pp. 315-362). Il n'est démontré dans le cas général qu'en 1927 par von Neumann (cf. pp. 16-17 dans *Mathematische Begründung der Quantenmechanik*, Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse, pp. 1-57).
6. Le théorème est évidemment vérifié si $\varphi$ est un produit scalaire.
7. cf. également la remarque p. 35.
8. Si $\varphi(y,y) = 0$, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $2t\varphi(x,y) + \varphi(x,x) \geqslant 0$ donc $\varphi(x,y) = 0$ et l'inégalité du théorème est bien vérifiée.

**John von Neumann**
(1903–1957)

Né Neumann (János Lajos[a]) à Budapest, il ne devient von Neumann qu'en 1913 lorsque son père achète un titre nobiliaire[b]. C'est un enfant prodige doté d'une mémoire exceptionnelle. Il publie son premier article en 1922[c]. Ses capacités prodigieuses lui permettent l'obtention d'excellents résultats en mathématiques à l'université de Budapest, sans avoir assisté au moindre cours. À peine âgé de vingt ans, il se fait remarquer en publiant un article sur la théorie des nombres, dans lequel il améliore la définition de Cantor[d] d'un nombre ordinal[e]. Il soutient sa thèse[f] à l'université de Budapest en 1926 : elle traite de l'axiomatisation de la théorie des ensembles, sujet sur lequel il publie, dès l'âge de 22 ans, des articles d'une incroyable densité[g]. À partir de 1927, il excelle à nouveau dans l'axiomatisation de la mécanique quantique, sujet réputé pourtant très difficile : il est l'homme qui parvient à introduire les fondements mathématiques de cette théorie[h]. Considéré par ses pairs comme un authentique génie, il obtient également des résultats scientifiques remarquables dans des disciplines très diversifiées comme la théorie des jeux[i] et les automates cellulaires[j]. Il peut être, à juste titre, considéré comme un pionnier dans la description des composants d'un ordinateur[k].

*a.* En Hongrie, une personne est nommée systématiquement dans l'ordre du nom puis des prénoms.
*b.* Il germanise alors son prénom en Johann puis le modifie en John lorsqu'il émigre aux États-Unis.
*c.* cf. *Über die Lage der Nullstellen gewisser Minimumpolynome* (avec M. Fekete), Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, **31**, pp. 125-130.
*d.* cf. notice biographique p. 369.
*e.* cf. *Zur Einführung der transfiniten Zahlen*, Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged), **1**, pp. 199-208 (1923).
*f.* cf. *Az általános halmazelmélet axiomatikus felépítése* [La structure axiomatique de la théorie générale des ensembles] reprise et complétée dans l'article, *Die Axiomatisierung der Mengenlehre*, Mathematische Zeitschrift, **27**, pp. 669-752 (1928).
*g.* cf. *Eine Axiomatisierung der Mengenlehre*, Journal de Crelle, **154**, pp. 219-240 (1925).
*h.* cf. son ouvrage résumant ses cinq années de recherche, *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*, Springer, Berlin (1932).
*i.* cf. *Zur Theorie der Gesellschaftsspiele*, Mathematische Annalen, **100**, pp. 295-320 (1928).
*j.* cf. son ouvrage posthume *Theory of Self-Reproducing Automata*, Burks, Urbana-London (1966).
*k.* cf. *First Draft of a Report on the EDVAC*, Moore School of Electrical Engineering, University of Pennsylvania (1945).

**Exemples**

1. Appliquons l'inégalité de Cauchy-Schwarz au premier exemple p. 25.

   On a alors pour tout $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$ dans $\mathbb{R}^n$,

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right)$$

2. Appliquons l'inégalité de Cauchy-Schwarz au deuxième exemple p. 25. On a alors, pour tout $f$ et $g$ dans $C^0\big([0,1],\mathbb{R}\big)$,

$$\left(\int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant \left(\int_0^1 f^2(t)\,\mathrm{d}t\right)\left(\int_0^1 g^2(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

3. Appliquons cette inégalité au troisième exemple p. 26. On a alors, pour tout $A$ et $B$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\mathrm{tr}^2\big(A^T B\big) \leqslant \mathrm{tr}\big(A^T A\big)\,\mathrm{tr}\big(B^T B\big)$$

### 1.2.3 Inégalité de Minkowski

**Théorème 2 (inégalité de Minkowski[9] (1927)[10])**

Soient $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $\varphi$ une forme bilinéaire symétrique positive[11] sur $E$. Alors pour tout $(x,y)\in E^2$, on a[12]

$$\sqrt{\varphi(x+y,x+y)} \leqslant \sqrt{\varphi(x,x)} + \sqrt{\varphi(y,y)}$$

**Démonstration**

Soit $(x,y)\in E^2$. Alors l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned}\text{Alors}\ \ \varphi(x+y,x+y) &= \varphi(x,x)+2\varphi(x,y)+\varphi(y,y)\\ &\leqslant \varphi(x,x)+2\big|\varphi(x,y)\big|+\varphi(y,y)\\ &\leqslant \varphi(x,x)+2\sqrt{\varphi(x,x)}\sqrt{\varphi(y,y)}+\varphi(y,y)\\ &\leqslant \left(\sqrt{\varphi(x,x)}+\sqrt{\varphi(y,y)}\right)^2\end{aligned}$$

d'où l'inégalité de Minkowski.

9. Ce théorème a été démontré dans un cas particulier par Minkowski (cf. p. 115 dans *Geometrie der Zahlen*, Teubner, Leipzig).
10. Ce théorème, connu sous le nom d'*inégalité de Minkowski*, n'est en réalité démontré dans le cas général qu'en 1927 par von Neumann (cf. pp. 16-17 dans *Mathematische Begründung der Quantenmechanik*, Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse, pp. 1-57).
11. Le théorème est évidemment vérifié si $\varphi$ est un produit scalaire.
12. cf. également la remarque p. 35.

### 1.2.4 Normes

**Définition 5**

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

On appelle *norme*[13] sur $E$ toute application $\|\cdot\| : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ telle que pour tout $(x, y) \in E^2$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$,

- $\|x\| = 0 \Longrightarrow x = 0$ (*séparation*)
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$ (*homogénéité*)
- $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ (*inégalité triangulaire*)

On appelle *espace vectoriel normé* (sur $\mathbb{K}$)[14] tout couple $\big(E, \|\cdot\|\big)$ où $E$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\|\cdot\|$ une norme sur $E$.

**Remarque**

Si $\|\cdot\|$ est une norme sur $E$, on a immédiatement en prenant $\lambda = 0$, $\|0\| = 0$.

**Exemples**

1. La fonction valeur absolue $|\cdot|$ est une norme sur $\mathbb{R}$.

2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}^n$. Notons $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ les applications de $E$ dans $\mathbb{R}_+$ définies pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in E$ par

   - $\|x\|_1 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} |x_k|$
   - $\|x\|_2 = \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)^{1/2}$

13. La notion générale de norme dans un espace vectoriel quelconque est introduite en 1920 par Banach (cf. notice biographique p. 83) p. 135 de sa thèse publiée en 1922 (cf. *Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales*, Fundamenta Mathematicae, **3**, pp. 133-181). Trois autres mathématiciens introduisent également cette définition de la norme entre 1920 et 1922 : Norbert Wiener en 1920 (cf. *On the theory of sets of points in terms of continuous transformations*, pp 312-315 de l'ouvrage publié en 1921 : Comptes rendus du Congrès international des mathématiciens [Strasbourg, 22-30 septembre 1920], Privat, Toulouse), Eduard Helly en 1921 (cf. *Über Systeme linearer Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten*, Monatshefte für Mathematik und Physik, **31**, pp. 60-91) et Hans Hahn en 1922 (cf. *Über Folgen linearer Operationen*, Monatshefte für Mathematik und Physik, **32**, pp. 3-88). Wiener dit lui-même en 1923 (cf. p. 143 de sa *Note on a paper of M. Banach*, Fundamenta Mathematicae, **4**, pp. 136-143) que la paternité de cette notion est à remettre à Banach car la thèse de ce dernier est soutenue quelques mois avant ses travaux. Le terme et la définition axiomatique d'une norme avaient déjà été présentés en 1918 par Riesz (cf. notice biographique p. 600) dans le cas particulier de l'espace des fonctions continues sur $[a, b]$ (cf. p. 72 dans *Über lineare Funktionalgleichungen*, Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged), **41**, pp. 71-98).
14. Sans précision, un espace vectoriel normé est un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}$.

- $\|x\|_\infty = \underset{k\in[\![1,n]\!]}{\operatorname{Max}} |x_k|$

Alors $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont trois normes[15] sur $E$.

En effet, pour chacune des applications, les propriétés de séparation et d'homogénéité sont évidentes. Montrons simplement l'inégalité triangulaire.
Soit $\big(x=(x_1,\dots,x_n), y=(y_1,\dots,y_n)\big)\in E^2$.

- $\|x+y\|_1 = \displaystyle\sum_{k=1}^n |x_k+y_k| \leqslant \sum_{k=1}^n \Big(|x_k|+|y_k|\Big)$ donc $\|x+y\|_1 \leqslant \|x\|_1 + \|y\|_1$.

- Remarquons que[16] $\|x\|_2^2 = \langle x|x\rangle$ où le produit scalaire $\langle\ |\ \rangle$ est défini par

$$\langle x|y\rangle = \sum_{k=1}^n x_k y_k$$

  Ainsi, via l'inégalité de Minkowski p. 30, on a

$$\sqrt{\langle x+y|x+y\rangle} \leqslant \sqrt{\langle x|x\rangle} + \sqrt{\langle y|y\rangle}$$

  c'est-à-dire $\|x+y\|_2 \leqslant \|x\|_2 + \|y\|_2$.

- Pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, $|x_k+y_k| \leqslant |x_k|+|y_k| \leqslant \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$.

  Donc $\|x+y\|_\infty = \underset{k\in[\![1,n]\!]}{\operatorname{Max}} |x_k+y_k| \leqslant \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$.

3. Soient $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que $a<b$ et $E=C^0\big([a,b],\mathbb{R}\big)$ l'espace des fonctions continues sur $[a,b]$. Notons $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ les applications de $E$ dans $\mathbb{R}_+$ définies pour tout $f\in E$ par

- $\|f\|_1 = \displaystyle\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$

- $\|f\|_2 = \left(\displaystyle\int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t\right)^{1/2}$

- $\|f\|_\infty = \underset{t\in[a,b]}{\operatorname{Sup}} |f(t)|$

15. Plus généralement, on peut montrer que pour tout réel $p$ supérieur ou égal à 1, les applications $\|\cdot\|_p : x=(x_1,\dots,x_n)\longmapsto \left(\displaystyle\sum_{k=1}^n |x_k|^p\right)^{1/p}$ sont des normes sur $E$ (cf. corollaire 3 p. 117).

16. d'où la dénomination de *norme euclidienne* pour $\|\cdot\|_2$.

Alors $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont trois normes[17] sur $E$ appelées respectivement norme de la *convergence en moyenne*, de la *convergence en moyenne quadratique* et norme de la *convergence uniforme*. En effet, pour chacune des applications, les propriétés de séparation et d'homogénéité sont évidentes. Montrons simplement l'inégalité triangulaire.

Soit $(f, g) \in E^2$.

- $\|f+g\|_1 = \int_a^b |f(t)+g(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b \Big(|f(t)| + |g(t)|\Big)\,\mathrm{d}t \leqslant \|f\|_1 + \|g\|_1$.

- Remarquons que $\|f\|_2^2 = \langle f|f\rangle$ où le produit scalaire $\langle\ |\ \rangle$ est défini par

$$\langle f|g\rangle = \int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

  Ainsi, via l'inégalité de Minkowski p. 30, on a

$$\sqrt{\langle f+g|f+g\rangle} \leqslant \sqrt{\langle f|f\rangle} + \sqrt{\langle g|g\rangle}$$

  c'est-à-dire $\|f+g\|_2 \leqslant \|f\|_2 + \|g\|_2$.

- Pour tout $t \in [a, b]$, $|f(t)+g(t)| \leqslant |f(t)| + |g(t)| \leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.

  Donc $\|f+g\|_\infty = \operatorname*{Sup}_{t\in[a,b]} |f(t)+g(t)| \leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.

4. Soit $E = \ell^1(\mathbb{N})$ l'espace (vectoriel) des suites réelles $u = (u_n)$ telles que la série $\sum |u_n|$ converge. Notons $\|\cdot\|_1$ l'application de $E$ dans $\mathbb{R}$ définie pour tout $u = (u_n)$ dans $E$ par

$$\|u\|_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$$

Alors $\|\cdot\|_1$ est une norme sur $E$. En effet, les propriétés de séparation et d'homogénéité sont évidentes.

Montrons l'inégalité triangulaire. Soit $\big(u = (u_n), v = (v_n)\big) \in E^2$. Alors

$$\sum_{k=0}^{n} |u_k + v_k| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \Big(|u_k| + |u_k|\Big) \leqslant \sum_{k=0}^{n} |u_k| + \sum_{k=0}^{n} |v_k| \leqslant \|u\|_1 + \|v\|_1 \qquad (*)$$

17. Plus généralement, on peut montrer que pour tout réel $p$ supérieur ou égal à 1, les applications $\|\cdot\|_p : f \longmapsto \left(\int_a^b |f(t)|^p\,\mathrm{d}t\right)^{1/p}$ sont des normes sur $E$.

Donc la suite des sommes partielles associée à la série à termes positifs $\sum\left|u_n+v_n\right|$ est majorée donc converge. En passant à la limite quand $n$ tend vers l'infini dans $(*)$, on a

$$\left\|u+v\right\|_1 \leqslant \left\|u\right\|_1 + \left\|v\right\|_1$$

5. Soit $E=\ell^2(\mathbb{N})$ l'espace (vectoriel) des suites réelles $u=(u_n)$ telles que la série $\sum u_n^2$ converge. Notons $\|\cdot\|_2$ l'application de $E$ dans $\mathbb{R}$ définie pour tout $u=(u_n)$ dans $E$ par

$$\left\|u\right\|_2 = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2\right)^{1/2}$$

Alors $\|\cdot\|_2$ est une norme sur $E$. En effet, les propriétés de séparation et d'homogénéité sont évidentes.

Montrons l'inégalité triangulaire. Soit $\big(u=(u_n), v=(v_n)\big)\in E^2$. Alors via l'inégalité de Minkowski p. 30 sur $\mathbb{R}^{n+1}$ muni du produit scalaire $\langle x|y\rangle = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x_k y_k$, on a

$$\sqrt{\sum_{k=0}^{n}\big(u_k+v_k\big)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{k=0}^{n} u_k^2} + \sqrt{\sum_{k=0}^{n} v_k^2} \leqslant \left\|u\right\|_2 + \left\|v\right\|_2 \qquad (**)$$

Donc la suite des sommes partielles associées à la série à termes positifs $\sum\big(u_n+v_n\big)^2$ est majorée donc converge et en passant à la limite quand $n$ tend vers l'infini dans $(**)$, on a

$$\left\|u+v\right\|_2 \leqslant \left\|u\right\|_2 + \left\|v\right\|_2$$

6. Soit $E=\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ l'espace des matrices à $n$ lignes et $p$ colonnes à coefficients dans $\mathbb{R}$. Notons $\|\cdot\|_\infty$ l'application de $E$ dans $\mathbb{R}$ définie pour tout $A=\big(a_{ij}\big)\in E$ par

$$\left\|A\right\|_\infty = \operatorname*{Max}_{\substack{i\in[\![1,n]\!]\\ j\in[\![1,p]\!]}} \left|a_{ij}\right|$$

Alors $\|\cdot\|_\infty$ est une norme [18] sur $E$. En effet, les propriétés de séparation et d'homogénéité sont évidentes.

18. On peut également montrer que les applications $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ définies pour tout $A=(a_{ij})\in E$ respectivement par $\|A\|_1 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}\left|a_{ij}\right|$ et $\|A\|_2 = \Big(\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} a_{ij}^2\Big)^{1/2}$ sont des normes sur $E$.

Montrons l'inégalité triangulaire. Soit $\big(A = (a_{ij}), B = (b_{ij})\big) \in E^2$. Alors pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]$ on a

$$\left|a_{ij} + b_{ij}\right| \leqslant \left|a_{ij}\right| + \left|b_{ij}\right| \leqslant \left\|A\right\|_\infty + \left\|B\right\|_\infty$$

donc

$$\left\|A + B\right\|_\infty \leqslant \left\|A\right\|_\infty + \left\|B\right\|_\infty$$

**Remarque**

Soit $\big(E, \langle\ |\ \rangle\big)$ un espace préhilbertien réel.

Soit $\|\cdot\| : \begin{cases} E & \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto \sqrt{\langle x|x\rangle} \end{cases}$

Alors l'inégalité de Cauchy-Schwarz p. 28 s'écrit

$$\left|\langle x|y\rangle\right| \leqslant \|x\|\,\|y\|$$

De plus, $\|\cdot\|$ est une norme sur $E$ [19] car, via la définition d'un produit scalaire, les propriétés de séparation et d'homogénéité sont évidentes, et, via l'inégalité de Minkowski p. 30, on a directement

$$\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$$

**Proposition 1**

Soit $\big(E, \|\cdot\|\big)$ un espace vectoriel normé. Alors pour tout $(x, y) \in E^2$, on a

$$\big|\|x\| - \|y\|\big| \leqslant \|x - y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$$

**Démonstration**

Soit $(x, y) \in E^2$.

L'une des inégalités est évidente car

$$\|x - y\| = \big\|x + (-y)\big\| \leqslant \|x\| + \|-y\| = \|x\| + \|y\|$$

D'autre part $\|x\| = \big\|(x - y) + y\big\| \leqslant \|x - y\| + \|y\|$ donc

$$\|x\| - \|y\| \leqslant \|x - y\| \qquad (*)$$

19. appelée *norme associée au produit scalaire* $\langle\ |\ \rangle$.

De même, $\|y\| = \big\|(y-x)+x\big\| \leqslant \|y-x\|+\|x\| = \|x-y\|+\|x\|$ donc $\|y\|-\|x\| \leqslant \|x-y\|$ d'où

$$-\|x-y\| \leqslant \|x\| - \|y\| \qquad (**)$$

Via les inégalités $(*)$ et $(**)$, on a finalement

$$-\|x-y\| \leqslant \|x\| - \|y\| \leqslant \|x-y\|$$

donc

$$\big|\|x\| - \|y\|\big| \leqslant \|x-y\|$$

### 1.2.5 Distance

**Définition 6**

Soit $E$ un ensemble non vide.
On appelle *distance* sur $E$ toute application $d : E^2 \longrightarrow \mathbb{R}_+$ telle que pour tout $(x,y) \in E^2$,

- $d(x,y) = 0 \iff x = y$ (*séparation*)
- $d(y,x) = d(x,y)$ (*symétrie*)
- $d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z)$ (*inégalité triangulaire*)

On appelle *espace métrique*[20] tout couple $(E,d)$ où $E$ est un ensemble non vide et $d$ une distance sur $E$.

**Remarque**

Contrairement à la propriété de séparation pour une norme, il n'est pas possible de montrer l'implication $x = y \Longrightarrow d(x,y) = 0$ à partir des deux autres propriétés.

**Proposition 2**

Soit $(E,d)$ un espace métrique. Alors pour tout $(x,y,z) \in E^3$, on a

$$\big|d(x,y) - d(x,z)\big| \leqslant d(y,z)$$

20. La notion de distance est introduite (sous le terme *écart*) par Fréchet (cf. notice biographique p. 96) dans sa thèse de 1906 (cf. p. 30 dans *Sur quelques points du calcul fonctionnel*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, **22**, pp. 1-74) et l'appellation *espace métrique* est due à Hausdorff (cf. notice biographique p. 72) en 1914 (cf. p. 211 dans *Grundzüge der Mengenlehre*, Veit & Comp., Leipzig).

**Démonstration**

Soit $(x, y, z) \in E^3$. Alors via l'inégalité triangulaire on a $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$ donc via la symétrie,

$$d(x, y) - d(x, z) \leqslant d(y, z) \qquad (*)$$

De même $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$ donc $d(x, z) - d(x, y) \leqslant d(y, z)$ d'où

$$d(x, y) - d(x, z) \geqslant -d(y, z) \qquad (**)$$

Via $(*)$ et $(**)$, on a finalement

$$\big|d(x, y) - d(x, z)\big| \leqslant d(y, z)$$

### 1.2.6 Distance associée à une norme

**Définition 7**

Soit $\big(E, \|\cdot\|\big)$ un espace vectoriel normé. On appelle *distance associée* à $\|\cdot\|$ l'application $d : E^2 \longrightarrow \mathbb{R}_+$ définie pour tout $(x, y) \in E^2$ par

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

**Remarque**

Via les propriétés d'une norme, $d$ est bien une distance sur $E$.

Remarquons que $d$ vérifie alors deux autres propriétés : pour tout $(x, y, z) \in E^3$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a

$$d(x + z, y + z) = d(x, y) \quad \text{et} \quad d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x, y)$$

En effet

$$d(x + z, y + z) = \big\|(x + z) - (y + z)\big\| = \|x - y\| = d(x, y)$$

et

$$d(\lambda x, \lambda y) = \|\lambda x - \lambda y\| = |\lambda| \|x - y\| = d(x, y)$$

### 1.2.7 Distance d'un point à une partie d'un espace vectoriel normé

Soient $\big(E, \|\cdot\|\big)$ un espace vectoriel normé et $d$ la distance associée à $\|\cdot\|$.

Soit $A \subset E$ tel que $A \neq \emptyset$.

L'ensemble $\{d(x,a), a \in A\}$ est une partie non vide de $\mathbb{R}_+$ minorée par 0 et admet donc une borne inférieure d'où la définition suivante.

**Définition 8**

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, $d$ la distance associée à $\|\cdot\|$, $A$ une partie non vide de $E$ et $x \in E$.
On appelle *distance de $x$ à $A$* le réel noté $d(x, A)$ défini par

$$d(x, A) = \operatorname*{Inf}_{a \in A} d(x, a) = \operatorname*{Inf}_{a \in A} \|x - a\|$$

### 1.2.8 Produit d'espaces vectoriels normés

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $n$ espaces vectoriels normés $(E_1, \|\cdot\|_{E_1})$, $(E_2, \|\cdot\|_{E_2})$, $\ldots$, $(E_n, \|\cdot\|_{E_n})$.

Est-il possible de définir une norme sur $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ ?

La proposition suivante donne la réponse.

**Proposition 3**

Soient $(E_1, \|\cdot\|_{E_1})$, $(E_2, \|\cdot\|_{E_2})$, $\ldots$, $(E_n, \|\cdot\|_{E_n})$, $n$ espaces vectoriels normés.
Alors $(E_1 \times \cdots \times E_n\,, \|\cdot\|_\infty)$ est un espace vectoriel normé appelé *espace vectoriel normé produit* où pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$,

$$\|x\|_\infty = \operatorname*{Max}_{k \in [\![1,n]\!]} \|x_k\|_{E_k}$$

**Démonstration**

Montrons que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur $E_1 \times \cdots \times E_n$.

Les propriétés de séparation et d'homogénéité sont immédiates. Montrons l'inégalité triangulaire.

Soit $\big(x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n)\big) \in (E_1 \times \cdots \times E_n)^2$.

Alors, comme pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\|\cdot\|_{E_k}$ est une norme sur $E_k$, on a

$$\begin{aligned} \|x_k + y_k\|_{E_k} &\leqslant \|x_k\|_{E_k} + \|y_k\|_{E_k} \\ &\leqslant \underset{k\in[\![1,n]\!]}{\operatorname{Max}} \|x_k\|_{E_k} + \underset{k\in[\![1,n]\!]}{\operatorname{Max}} \|y_k\|_{E_k} = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty \end{aligned}$$

Donc

$$\|x+y\|_\infty = \underset{k\in[\![1,n]\!]}{\operatorname{Max}} \|x_k + y_k\|_{E_k} \leqslant \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$$

### 1.2.9 Convergence d'une suite dans un espace vectoriel normé

**Définition 9**

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $(x_n)$ une suite de $E$ (c'est-à-dire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in E$).
On dit $(x_n)$ converge vers $\ell \in E$ (pour la norme $\|\cdot\|$) si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geqslant N \Longrightarrow \|x_n - \ell\| < \varepsilon$$

**Remarques**

1. L'unicité de la limite se montre comme dans le cas où $E = \mathbb{R}$ en remplaçant les valeurs absolues par la norme $\|\cdot\|$. De la même façon, on montre la stabilité par la somme et le produit par un scalaire. Enfin, il est également immédiat, toujours en remplaçant les valeurs absolues par la norme $\|\cdot\|$, que toute suite convergente dans $E$ est bornée[21].

2. La limite dépend de la norme choisie.

   En effet, soient $E = C^0([0,1], \mathbb{R})$ et $(f_n)$ la suite définie pour tout $t \in [0,1]$ par $f_n(t) = t^n$.

   En reprenant les définitions de $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ (cf. p. 32), on a

   $$\|f_n\|_1 = \int_0^1 t^n \,\mathrm{d}t = \frac{1}{n+1} \quad \text{et} \quad \|f_n\|_\infty = \underset{t\in[0,1]}{\operatorname{Sup}} \left(t^n\right) = 1$$

   Donc $(f_n)$ converge vers la fonction nulle pour $\|\cdot\|_1$ mais pas pour $\|\cdot\|_\infty$.

21. Pour le détail des démonstrations dans le cas de $\mathbb{R}$, cf. Costantini, *Analyse 1re année*, De Boeck (2013).

**Proposition 4**

Soient $p \in \mathbb{N}^*$, $(E_1 \times \cdots \times E_p\,,\, \|\cdot\|_\infty)$ espace vectoriel produit de $p$ espaces vectoriels normés $(E_1, \|\cdot\|_{E_1})$, $(E_2, \|\cdot\|_{E_2})$, $\ldots$, $(E_p, \|\cdot\|_{E_p})$ et $(x_n)$ une suite de $E_1 \times \cdots \times E_p$.

Notons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n = \left(x_n^{(1)}, \ldots, x_n^{(p)}\right)$.

Alors $(x_n)$ converge vers $\ell = (\ell_1, \ldots, \ell_p) \in E_1 \times \cdots \times E_p$ ssi pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, $\left(x_n^{(k)}\right)$ converge vers $\ell_k$.

**Démonstration**

Soit $\varepsilon > 0$.

Comme $(x_n)$ converge vers $\ell$, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$n \geqslant N \Longrightarrow \left\|x_n - \ell\right\|_\infty < \varepsilon$$

Ainsi pour tout $k \in [\![1, p]\!]$,

$$n \geqslant N \Longrightarrow \left\|x_n^{(k)} - \ell_k\right\|_{E_k} \leqslant \left\|x_n - \ell\right\|_\infty < \varepsilon$$

donc pour $k \in [\![1, p]\!]$, $\left(x_n^{(k)}\right)$ converge vers $\ell_k$.

Réciproquement, supposons que pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, $\left(x_n^{(k)}\right)$ converge vers $\ell_k$.

Soit $\varepsilon > 0$.

Alors pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, il existe un rang $n_k \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$n \geqslant n_k \Longrightarrow \left\|x_n^{(k)} - \ell_k\right\|_{E_k} < \varepsilon$$

Ainsi, si $N = \underset{k \in [\![1,p]\!]}{\operatorname{Max}} n_k$, pour tout $k \in [\![1, p]\!]$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$n \geqslant N \Longrightarrow \left\|x_n^{(k)} - \ell_k\right\|_{E_k} < \varepsilon$$

d'où

$$n \geqslant N \Longrightarrow \left\|x_n - \ell\right\|_\infty = \underset{k \in [\![1,p]\!]}{\operatorname{Max}} \left\|x_n^{(k)} - \ell_k\right\|_{E_k} < \varepsilon$$

donc $(x_n)$ converge vers $\ell$.

# 1.3 Topologie dans un espace vectoriel normé

## 1.3.1 Boule ouverte, boule fermée, sphère

**Définition 10**

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. On appelle *boule ouverte* (respectivement *boule fermée*) de centre $a \in E$ et de rayon $r \in \mathbb{R}_+^*$ l'ensemble noté $B(a, r)$ ou $B_E(a, r)$ (respectivement $\overline{B}(a, r)$ ou $\overline{B_E}(a, r)$) défini par

$$B(a, r) = \{x \in E, \|x - a\| < r\} \quad \left(\text{respectivement } \overline{B}(a, r) = \{x \in E, \|x - a\| \leqslant r\}\right)$$

On appelle *sphère* de centre $a \in E$ et de rayon $r \in \mathbb{R}_+^*$ l'ensemble noté $S(a, r)$ défini par

$$S(a, r) = \{x \in E, \|x - a\| = r\}$$

**Exemple**

Dans l'espace vectoriel normé $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, $B(a, r) = ]a - r, a + r[$ et $\overline{B}(a, r) = [a - r, a + r]$.

**Remarque**

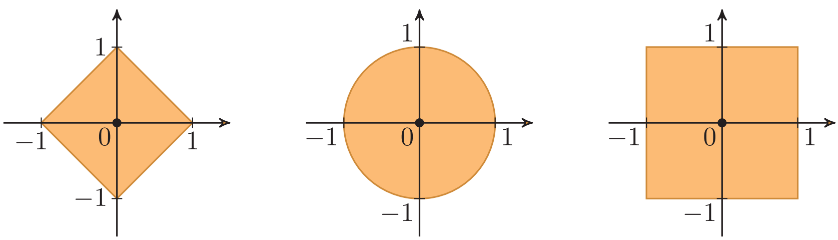
La représentation graphique des boules dépend de la norme choisie.

Soient $E = \mathbb{R}^2$ et $u = (x, y) \in E$.

Reprenons les définitions des trois normes sur $E$ définies p. 31 : $\begin{cases} \|u\|_1 = |x| + |y| \\ \|u\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \|u\|_\infty = \text{Max}(|x|, |y|) \end{cases}$

et représentons graphiquement les boules fermées $\overline{B_i}(0, 1) = \left\{x \in E, \|x\|_i \leqslant 1\right\}$ pour $i = 1$, $i = 2$ et $i = \infty$.

$E = \mathbb{R}^2$




$\overline{B_1}(0, 1)$ $\overline{B_2}(0, 1)$ $\overline{B_\infty}(0, 1)$

**Proposition 5**

Soient $(E_1, \|\cdot\|_{E_1}), \ldots, (E_n, \|\cdot\|_{E_n})$, $n$ espaces vectoriels normés, $E = E_1 \times \cdots \times E_n$ l'espace vectoriel produit [22] muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$, $a = (a_1, \ldots, a_n) \in E$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$.
Alors $B_E(a, r) = B_{E_1}(a_1, r) \times \cdots \times B_{E_n}(a_n, r)$.
De même $\overline{B_E}(a, r) = \overline{B_{E_1}}(a_1, r) \times \cdots \times \overline{B_{E_n}}(a_n, r)$.

**Démonstration**

Soit $x = (x_1, \ldots, x_n) \in B_E(a, r)$. Alors $\|x - a\|_\infty = \underset{k \in [\![1,n]\!]}{\text{Max}} \|x_k - a_k\|_{E_k} < r$.

Donc pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\|x_k - a_k\|_{E_k} < r$ d'où $x_k \in B_{E_k}(a_k, r)$.

Réciproquement, soit $x = (x_1, \ldots, x_n) \in B_{E_1}(a_1, r) \times \cdots \times B_{E_n}(a_n, r)$.

Alors pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $x_k \in B_{E_k}(a_k, r)$ donc $\|x_k - a_k\|_{E_k} < r$.

Ainsi $\|x - a\|_\infty = \underset{k \in [\![1,n]\!]}{\text{Max}} \|x_k - a_k\|_{E_k} < r$ donc $x = (x_1, \ldots, x_n) \in B_E(a, r)$.

La démonstration est similaire dans le cas des boules fermées.

**Définition 11**

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $A \subset E$.
On dit que $A$ est *borné* s'il existe $K \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $x \in A$, $\|x\| \leqslant K$.

**Remarque**

En terme de boule fermée, $A$ borné signifie qu'il existe $K \in \mathbb{R}_+$ tel que $A \subset \overline{B}(0, K)$.

### 1.3.2 Normes équivalentes

**Définition 12**

Soient $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ deux normes sur $E$.
On dit que $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ sont *équivalentes* [23] s'il existe $(\lambda, \mu) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ tel que pour tout $x \in E$,

$$\lambda\|x\| \leqslant \|x\|' \leqslant \mu\|x\|$$

22. On rappelle que pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$, $\|x\|_\infty = \underset{k \in [\![1,n]\!]}{\text{Max}} \|x_k\|_{E_k}$.
23. On écrit parfois $\|\cdot\| \sim \|\cdot\|'$.

**Remarques**

1. Via cette définition de l'équivalence de deux normes, $\sim$ est une relation d'équivalence.

   En effet

   - $\sim$ est réflexive.
   - $\sim$ est symétrique. En effet, supposons que $\|\cdot\| \sim \|\cdot\|'$.
     Alors il existe $(\lambda, \mu) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ tel que pour tout $x \in E$,
     $$\lambda\|x\| \leqslant \|x\|' \leqslant \mu\|x\|$$
     donc
     $$\frac{1}{\mu}\|x\|' \leqslant \|x\| \leqslant \frac{1}{\lambda}\|x\|'$$
     d'où $\|\cdot\|' \sim \|\cdot\|$.
   - $\sim$ est transitive. En effet, supposons que $\|\cdot\| \sim \|\cdot\|'$ et $\|\cdot\|' \sim \|\cdot\|''$.
     Alors il existe $(\lambda, \mu) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ et $(\alpha, \beta) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ tels que pour tout $x \in E$,
     $$\lambda\|x\| \leqslant \|x\|' \leqslant \mu\|x\| \quad \text{et} \quad \alpha\|x\|' \leqslant \|x\|'' \leqslant \beta\|x\|'$$
     Donc
     $$\alpha\lambda\|x\| \leqslant \|x\|'' \leqslant \beta\mu\|x\|$$
     d'où $\|\cdot\| \sim \|\cdot\|''$.

2. Soient $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ deux normes équivalentes.
   Alors $\left\{\|x\|'/\|x\| ; x \in E, x \neq 0\right\}$ $\Big($respectivement $\left\{\|x\|/\|x\|' ; x \in E, x \neq 0\right\}\Big)$ est borné. En effet, il existe $(\lambda, \mu) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ tel que pour tout $x \in E$,
   $$\lambda\|x\| \leqslant \|x\|' \leqslant \mu\|x\|$$
   donc pour tout $x \in E$ tel $x \neq 0$,
   $$\lambda \leqslant \frac{\|x\|'}{\|x\|} \leqslant \mu \quad \left(\text{respectivement } \frac{1}{\mu} \leqslant \frac{\|x\|}{\|x\|'} \leqslant \frac{1}{\lambda}\right)$$
   Ainsi, s'il existe une suite non nulle $(x_n)$ de $E$ telle que la suite $\left(\dfrac{\|x_n\|'}{\|x_n\|}\right)$ ou la suite $\left(\dfrac{\|x_n\|}{\|x_n\|'}\right)$ n'est pas bornée, alors $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ ne sont pas équivalentes.

**Exemples**

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}^n$. Les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes.

   En effet, soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in E$. Montrons que[24]

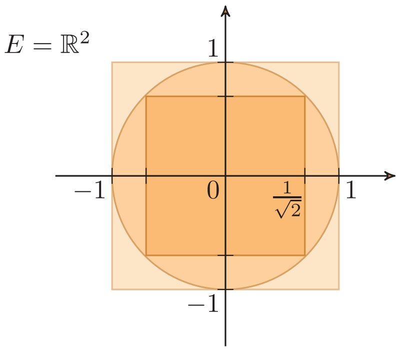
$$\begin{cases} \|x\|_\infty \leqslant \|x\|_2 \leqslant \sqrt{n}\|x\|_\infty \\ \|x\|_\infty \leqslant \|x\|_1 \leqslant n\|x\|_\infty \end{cases}$$

   Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $x_k^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} x_k^2 = \|x\|_2^2$ donc $|x_k| \leqslant \|x\|_2$ d'où $\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_2$.

   D'autre part, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $x_k^2 \leqslant \|x\|_\infty^2$ donc $\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \leqslant n\|x\|_\infty^2$

   d'où $\|x\|_2 \leqslant \sqrt{n}\|x\|_\infty$.

   Ainsi, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes.




Si les boules fermées sont « emboîtables », les normes sont équivalentes.

$$\overline{B_\infty}\left(0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) \subset \overline{B_2}(0,1) \subset \overline{B_\infty}(0,1)$$

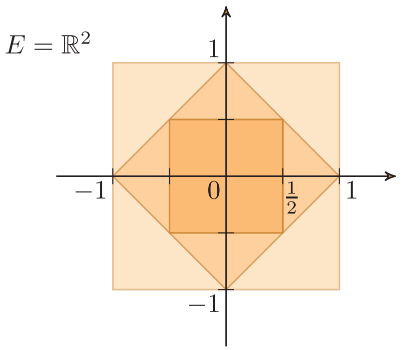
$$\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_2 \leqslant \sqrt{2}\|x\|_\infty$$

   D'autre part, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $|x_k| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |x_k| = \|x\|_1$ donc $\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_1$.

   Enfin, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $|x_k| \leqslant \|x\|_\infty$ donc $\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k| \leqslant n\|x\|_\infty$.

   Ainsi $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes et par transitivité $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ le sont également.

24. En reprenant les notations de la remarque p. 41, l'inégalité $\|x\|_2 \leqslant \sqrt{n}\|x\|_\infty$ est équivalente à l'inclusion $\overline{B_\infty}\left(0, 1/\sqrt{n}\right) \subset \overline{B_2}(0,1)$ ou encore à l'inclusion $\overline{B_\infty}(0,1) \subset \overline{B_2}\left(0, \sqrt{n}\right)$. Graphiquement, en prenant par exemple $n = 2$, la boule fermée $\overline{B_\infty}\left(0, 1/\sqrt{2}\right)$ peut s'emboîter dans la boule fermée $\overline{B_2}(0,1)$.




$$\overline{B_\infty}\left(0,\tfrac{1}{2}\right) \subset \overline{B_1}(0,1) \subset \overline{B_\infty}(0,1)$$

$$\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_1 \leqslant 2\|x\|_\infty$$

2. Soient $E = C^0\big([0,1],\mathbb{R}\big)$ et $(f_n)$ la suite définie pour tout $t \in [0,1]$ par $f_n(t) = t^n$.

   En reprenant les définitions de $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ (cf. p. 32), on a

$$\begin{cases} \|f_n\|_1 = \displaystyle\int_0^1 t^n \,\mathrm{d}t = \frac{1}{n+1} \\[2ex] \|f_n\|_\infty = \displaystyle\operatorname*{Sup}_{t\in[0,1]} \left(t^n\right) = 1 \\[2ex] \|f_n\|_2 = \left(\displaystyle\int_0^1 t^{2n} \,\mathrm{d}t\right)^{1/2} = \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}} \end{cases}$$

   En particulier on a

$$\begin{cases} \dfrac{\|f_n\|_2}{\|f_n\|_1} = \dfrac{n+1}{\sqrt{2n+1}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty \\[2ex] \dfrac{\|f_n\|_\infty}{\|f_n\|_1} = n+1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty \\[2ex] \dfrac{\|f_n\|_\infty}{\|f_n\|_2} = \sqrt{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty \end{cases}$$

   Via la deuxième remarque p. 43, on en déduit que les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ ne sont pas équivalentes. Ainsi, deux quelconques des normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ ne sont pas équivalentes.

## Proposition 6

Soient $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ deux normes sur $E$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ sont équivalentes.

(ii) Toute suite $(x_n)$ de $E$ converge vers $\ell \in E$ pour la norme $\|\cdot\|$ ssi $(x_n)$ converge vers $\ell$ pour la norme $\|\cdot\|'$.

**Démonstration**

$\boxed{\text{(i)} \Longrightarrow \text{(ii)}}$ Supposons que $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ sont équivalentes.
Alors il existe $(\lambda, \mu) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ tel que pour tout $x \in E$,

$$\lambda\|x\| \leqslant \|x\|' \leqslant \mu\|x\| \qquad (*)$$

Soit $\varepsilon > 0$.
Supposons que $(x_n)$ converge vers $\ell$ pour la norme $\|\cdot\|$.
Alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$n \geqslant N \Longrightarrow \|x_n - \ell\| < \frac{\varepsilon}{\mu}$$

Ainsi, via la deuxième inégalité de $(*)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$n \geqslant N \Longrightarrow \|x_n - \ell\|' \leqslant \mu\|x_n - \ell\| \leqslant \mu\frac{\varepsilon}{\mu} = \varepsilon$$

donc $(x_n)$ converge vers $\ell$ pour la norme $\|\cdot\|'$.

Réciproquement, supposons que $(x_n)$ converge vers $\ell$ pour la norme $\|\cdot\|'$.
Alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$n \geqslant N \Longrightarrow \|x_n - \ell\|' < \lambda\,\varepsilon$$

Ainsi, via la première inégalité de $(*)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$n \geqslant N \Longrightarrow \|x_n - \ell\| \leqslant \frac{1}{\lambda}\|x_n - \ell\|' \leqslant \frac{1}{\lambda}\lambda\,\varepsilon = \varepsilon$$

donc $(x_n)$ converge vers $\ell$ pour la norme $\|\cdot\|'$.

$\boxed{\text{(ii)} \Longrightarrow \text{(i)}}$ Supposons la seconde assertion.
Supposons par l'absurde que $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ ne sont pas équivalentes.

$$\text{Alors} \begin{cases} \text{pour tout } \mu \in \mathbb{R}_+^*, \text{ il existe } x \in E \text{ tel que } \|x\|' > \mu\|x\| \\ \text{ou} \\ \text{pour tout } \lambda \in \mathbb{R}_+^*, \text{ il existe } x \in E \text{ tel que } \lambda\|x\| > \|x\|' \end{cases}$$

Quitte à échanger le rôle des deux normes, supposons que pour tout $\mu \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $x \in E$ tel que $\|x\|' > \mu\|x\|$.

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, en prenant successivement $\mu = 1$, $\mu = 2$, $\dots$, $\mu = n$, il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de $E$ telle que

$$\|x_n\|' > n\|x_n\| \qquad (**)$$

Cette inégalité stricte implique que la suite $(x_n)$ est non nulle.
Soit à présent la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{x_n}{\|x_n\|}$$

Alors $\|u_n\| = \dfrac{1}{\sqrt{n}\|x_n\|}\|x_n\| = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $(u_n)$ converge vers 0 pour la norme $\|\cdot\|$.

Or, via l'inégalité $(**)$,

$$\|u_n\|' = \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\|x_n\|'}{\|x_n\|} > \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$$

donc $(u_n)$ ne converge pas vers 0 pour la norme $\|\cdot\|'$ d'où une contradiction avec l'hypothèse.

**Remarque**

Ainsi pour deux normes équivalentes, la notion de convergence coïncide.

### 1.3.3 Voisinage

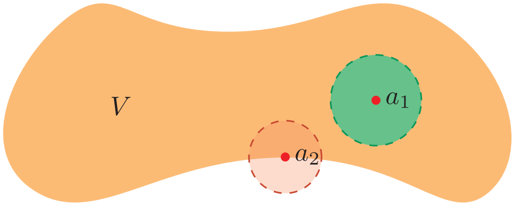
**Définition 13**

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, $V \subset E$ et $a \in E$.
On dit que $V$ est un *voisinage*[25] de $a$ (dans $E$) si $V$ contient une boule ouverte de centre $a$ c'est-à-dire s'il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $B(a, r) \subset V$.

25. La notion moderne de voisinage est introduite en 1914 par Hausdorff (cf. notice biographique p. 72 et p. 212 de son ouvrage *Grundzüge der Mengenlehre*, Veit & Comp., Leipzig).

### Notation

On note $\mathscr{V}_E(a)$ l'ensemble des voisinages de $a$ (dans $E$).




$V$ est un voisinage de $a_1$ mais n'est pas un voisinage de $a_2$.

### Remarques

1. Si $V$ est un voisinage de $a$, $a \in V$ car il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $B(a,r) \subset V$ et $a \in B(a,r)$.

2. Si $V$ est un voisinage de $a$ et $A$ est une partie de $E$ contenant $V$, alors $A$ est un voisinage de $a$. En effet, il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $B(a,r) \subset V$ or $V \subset A$ donc $B(a,r) \subset A$ donc $A$ est un voisinage de $a$.

### Proposition 7

Soient $\big(E, \|\cdot\|\big)$ un espace vectoriel normé et $a \in E$.

1. Une réunion quelconque[26] de voisinages de $a$ est un voisinage de $a$.
2. Une intersection finie de voisinages de $a$ est un voisinage de $a$.

### Démonstration

1. Soient $I$ un ensemble non vide et $(V_i)_{i \in I}$ une famille de voisinages de $a$.
   Comme pour tout $i \in I$, $V_i \subset \bigcup_{i \in I} V_i$, via la remarque précédente, $\bigcup_{i \in I} V_i$ est un voisinage de $a$.

2. Soit $(V_1, \dots, V_n)$ une famille de $n$ voisinages de $a$. Alors pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, il existe $r_k \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $B(a, r_k) \in V_k$.
   Soit $r = \underset{k \in [\![1,n]\!]}{\operatorname{Min}} r_k$. Alors $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $B(a,r) = \bigcap_{k=1}^{n} B(a, r_k) \subset \bigcap_{k=1}^{n} V_k$
   donc $\bigcap_{k=1}^{n} V_k$ est un voisinage de $a$.

26. c'est-à-dire $\bigcup_{i \in I} V_i$ où $I$ un ensemble non vide et $(V_i)_{i \in I}$ une famille de voisinages de $a$.

**Remarque**

Une intersection quelconque de voisinages de $a$ n'est pas un nécessairement un voisinage de $a$.

Par exemple pour $E = \mathbb{R}$ muni de la valeur absolue, $\left(\left]-\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n}\right[\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une famille de voisinages de 0.

Or $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[ = \{0\}$ n'est pas un voisinage de 0.

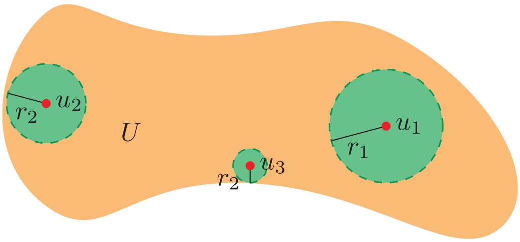
### 1.3.4 Ouvert, fermé

**Définition 14**

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $U \subset E$. On dit que $U$ est un *ouvert* [27,28] de $E$ si $U$ est un voisinage de chacun de ses points c'est-à-dire si

$$\forall u \in U \quad \exists r \in \mathbb{R}_+^* \quad B(u, r) \subset U$$

On dit que $F \subset E$ est un *fermé* [29,30] de $E$ si le complémentaire de $F$ dans $E$, noté $E\backslash F$ ou $\complement_E(F)$, est un ouvert de $E$.



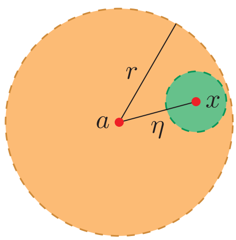

$U$ est un voisinage de chacun de ses points.

27. On dit aussi $U$ est *ouvert* dans $E$.
28. Cette notion est introduite (sous le terme allemand *Gebiet*, c'est-à-dire *domaine*) par Hausdorff en 1914 (cf. notice biographique p. 72 et p. 215 de son ouvrage *Grundzüge der Mengenlehre*, Veit & Comp., Leipzig) et l'appellation *sous-ensemble ouvert* est due à Carathéodory (1873-1950) en 1918 (cf. p. 40 de son ouvrage *Vorlesungen über reellen Funktionen*, Teubner, Leipzig).
29. On dit aussi $F$ est *fermé* dans $E$.
30. La notion d'ensemble fermé est due à Cantor (cf. notice biographique p. 369) en 1884 (cf. p. 470 du numéro 6 de son article *Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten*, Mathematische Annalen, **23**, pp. 453-488).

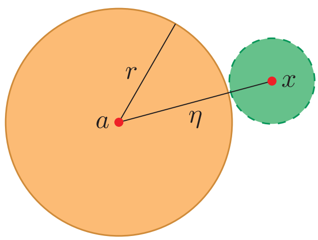
**Théorème 3 (Dedekind (vers 1871)[31]-Hausdorff[32,33] (1914)[34])**

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Alors

1. Toute boule ouverte est un ouvert de $E$.
2. Toute boule fermée est un fermé de $E$.
3. Une réunion quelconque d'ouverts de $E$ est un ouvert de $E$.
4. Une intersection finie d'ouverts de $E$ est un ouvert de $E$.
5. Une réunion finie de fermés de $E$ est un fermé de $E$.
6. Une intersection quelconque de fermés de $E$ est un fermé de $E$.



Une boule ouverte est un ouvert.



Une boule fermée est un fermé.

**Démonstration**

1. Soient $a \in E$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$. Montrons que $B(a,r)$ est un ouvert de $E$.

   Soit $x \in B(a,r)$. Notons $\eta = \|x-a\|$. Alors $\eta < r$ car $x \in B(a,r)$.

   Montrons que $B(x, r-\eta) \subset B(a,r)$.

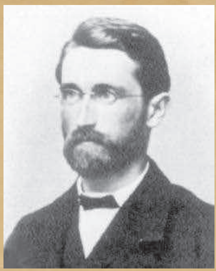
   Soit $y \in B(x, r-\eta)$. Alors $\|y-x\| < r-\eta$

   donc

   $$\|y-a\| = \|y-x+x-a\| \leqslant \|y-x\| + \|x-a\| \leqslant r-\eta+\eta = r$$

   d'où $y \in B(a,r)$. Ainsi $B(a,r)$ est un ouvert de $E$.

31. Dedekind montre déjà vers 1871 le premier item de ce théorème dans son article *Allgemeine Sätze über Räume* publié dans ses œuvres complètes (cf. pp. 353-355 dans *Gesammelte mathematische Werke*, **2**, Vieweg, Braunschweig (1931)).
32. cf. notice biographique p. 72.
33. Ces résultats ne sont pas connus sous le nom de théorème de Dedekind-Hausdorff mais peuvent être attribués à ces deux mathématiciens (cf. notes 31 et 34).
34. cf. p. 216 de son ouvrage *Grundzüge der Mengenlehre*, Veit & Comp., Leipzig.



**Richard Dedekind**
(1831–1916)

Originaire de Brunswick, Richard Dedekind s'intéresse dès sa plus tendre enfance à la physique et la chimie mais considère que ces matières manquent de rigueur. Il se tourne alors vers les mathématiques et s'intéressera, comme Cantor[a] aux fondements de cette discipline. Il entre à l'université de Göttingen en 1850 et suit avec grand intérêt le cours de Gauss[b] sur la méthode des moindres carrés[c]. À peine deux ans plus tard, il soutient sa thèse, sous sa direction, sur les intégrales eulériennes[d]. Il passe sa thèse d'habilitation la même année que Riemann[e] en 1854 et commence à enseigner les probabilités et la géométrie au sein de son université. La nomination de Lejeune-Dirichlet[f] pour succéder à Gauss est déterminante pour l'orientation des recherches de Dedekind car c'est un spécialiste de la théorie des nombres[g]. Outre les cours de cet illustre mathématicien sur l'intégrale définie, la théorie des nombres et les équations aux dérivées partielles, Dedekind étudie scrupuleusement les travaux de Galois sur la théorie des groupes et est le premier à exposer dans une université allemande les théories galoisiennes. À partir de 1858, il enseigne à l'École polytechnique de Zürich puis en 1862 est nommé à l'École polytechnique de sa ville natale, poste qu'il conserve jusqu'en 1894. L'œuvre de Dedekind est remarquable car elle amorce, via une approche rigoureuse et axiomatique, le fondement de trois domaines essentiels des mathématiques : la théorie des groupes[h], la topologie et l'arithmétique[i].

*a*. cf. notice biographique p. 369.
*b*. notice biographique p. 207.
*c*. Il relate bien plus tard dans un article de 1901 son souvenir ému de ce cours dispensé par son maître (cf. *Gauß in seiner Vorlesung über die Methode der kleinsten Quadrate*, Festschrift zur Feier des hundertfünfzigjährigen Bestehens der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Beiträge zur Gelehrtengeschichte Göttingens, pp. 45-59).
*d*. cf. *Über die Elemente der Theorie der Eulerschen Integrale* extrait de *Gesammelte mathematische Werke*, **1**, Vieweg, Braunschweig (1930) pp. 1-26.
*e*. cf. notice biographique p. 153.
*f*. cf. notice biographique p. 317.
*g*. Dedekind devient vite très proche de Lejeune-Dirichlet et édite après la mort de ce dernier quatre éditions de ses cours, baptisés *Vorlesung über Zahlentheorie*, parmi lesquelles il écrit des suppléments notamment sur la notion d'idéal.
*h*. cf. par exemple *Abriß einer Theorie der höheren Kongruenzen in bezug auf einen reellen Primzahl-Modulus*, Journal de Crelle, **54**, pp. 1-26 (1857).
*i*. On lui doit notamment la notion d'idéal et de coupure (cf. par exemple son ouvrage *Stetigkeit und irrationale Zahlen*, Vieweg, Braunschweig (1872)).

2. Soient $a \in E$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$. Montrons que $\overline{B}(a,r)$ est un fermé de $E$ c'est-à-dire que $E \backslash \overline{B}(a,r)$ est un ouvert de $E$.

   Soit $x \in E \backslash \overline{B}(a,r)$. Notons $\eta = \|x-a\|$. Alors $\eta > r$ car $x \notin \overline{B}(a,r)$.

   Montrons que $B(x, \eta - r) \subset E \backslash \overline{B}(a,r)$.

   Soit $y \in B(x, \eta - r)$. Alors $\|x-y\| < \eta - r$ donc

$$\eta - \|x-y\| > r \qquad (*)$$

De plus $\|x-a\| = \|x-y+y-a\| \leqslant \|x-y\| + \|y-a\|$ donc, l'inégalité $(*)$, on a

$$\|y-a\| \geqslant \|x-a\| - \|x-y\| = \eta - \|x-y\| > r$$

d'où $y \notin \overline{B}(a,r)$ c'est-à-dire $y \in E\backslash\overline{B}(a,r)$. Ainsi $E\backslash\overline{B}(a,r)$ est un ouvert de $E$.

3. Soient $I$ un ensemble et $(U_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts de $E$. Montrons que $\bigcup\limits_{i\in I} U_i$ est un ouvert de $E$ c'est-à-dire un voisinage de chacun de ses points.

   Soit $x \in \bigcup\limits_{i\in I} U_i$. Alors il existe $i \in I$ tel que $x \in U_i$. Or $U_i$ est un ouvert de $E$, donc en particulier un voisinage de $x$, et $U_i \subset \bigcup\limits_{i\in I} U_i$ donc via la deuxième remarque p. 48, $\bigcup\limits_{i\in I} U_i$ est un voisinage de $x$.

4. Soit $(U_1,\ldots,U_n)$ une famille de $n$ ouverts de $E$. Montrons que $\bigcap\limits_{k=1}^{n} U_k$ est un ouvert de $E$ c'est-à-dire un voisinage de chacun de ses points.

   Soit $x \in \bigcap\limits_{k=1}^{n} U_k$. Alors pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $x \in U_k$ or tous les $U_k$ sont des ouverts de $E$ donc, en particulier voisinages de $x$.

   Via la proposition 7 (p. 48), $\bigcap\limits_{k=1}^{n} U_k$ est un voisinage de $x$.

5. Soit $(F_1,\ldots,F_n)$ une famille de $n$ fermés de $E$. Montrons que $\bigcup\limits_{k=1}^{n} F_k$ est un fermé de $E$ c'est-à-dire $E \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{n} F_k$ est un ouvert de $E$.

   Comme $E\backslash F_1$, …, $E\backslash F_n$ sont $n$ ouverts de $E$, via l'assertion précédente de cette proposition, $\bigcap\limits_{k=1}^{n} E\backslash F_k = E \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{n} F_k$ est un ouvert de $E$.

6. Soient $I$ un ensemble et $(F_i)_{i\in I}$ une famille de fermés de $E$. Montrons que $\bigcap\limits_{i\in I} F_i$ est un fermé de $E$ c'est-à-dire $E \setminus \bigcap\limits_{i\in I} F_i$ est un ouvert de $E$.

   Comme $(E\backslash F_i)_{i\in I}$ est une famille d'ouverts de $E$, via la troisième assertion de cette proposition, $\bigcup\limits_{i\in I} E\backslash F_i = E \setminus \bigcap\limits_{i\in I} F_i$ est un ouvert de $E$.

**Exemples**

1. $E$ et $\emptyset$ sont des ouverts de $E$ mais sont aussi des fermés de $E$ car $E \backslash E = \emptyset$ et $E \backslash \emptyset = E$ sont des ouverts de $E$.

2. Il existe également des ensembles ni ouvert, ni fermé. Par exemple dans l'espace vectoriel normé $\big(E = \mathbb{R}, |\,.\,|\big)$, $[0,1[$ n'est ni ouvert, ni fermé.

   En effet, $[0,1[$ n'est pas un voisinage de 0 car pour tout $r \in \mathbb{R}_+^*$, $]-r, r[ \not\subset [0,1[$ donc $[0,1[$ n'est pas un ouvert de $E$.

   De même $[0,1[$ n'est pas un fermé de $E$ car $E \backslash [0,1[ = ]-\infty, 0[ \cup [1, +\infty[$ n'est pas un ouvert de $E$ car n'est pas un voisinage de 1 : en effet, pour tout $r \in \mathbb{R}_+^*$, $]1-r, 1+r[ \not\subset ]-\infty, 0[ \cup [1, +\infty[$.

3. Dans un espace vectoriel normé $\big(E, \|\cdot\|\big)$, tout singleton $\{x\}$ est un fermé de $E$.

   En effet, $E \backslash \{x\}$ est un ouvert de $E$ car pour tout $y \in E \backslash \{x\}$,

$$B\big(y, \|y - x\|\big) \subset E \backslash \{x\}$$

4. Dans un espace vectoriel normé $\big(E, \|\cdot\|\big)$, toute partie finie est un fermé de $E$ car réunion d'un nombre fini de singletons.

**Remarques**

1. Une intersection quelconque d'ouverts d'un espace vectoriel normé $\big(E, \|\cdot\|\big)$ n'est pas nécessairement un ouvert de $E$.

   Par exemple dans $\big(\mathbb{R}, |\,.\,|\big)$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = \left]-\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n}\right[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$ or $\displaystyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} U_n = \{0\}$ n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}$ car pour tout $r \in \mathbb{R}_+^*$, $]r, r[ \not\subset \{0\}$.

2. Une réunion quelconque de fermés d'un espace vectoriel normé $\big(E, \|\cdot\|\big)$ n'est pas nécessairement un fermé de $E$.

   Par exemple dans $\big(\mathbb{R}, |\,.\,|\big)$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $F_n = \left[\dfrac{1}{n}, 1\right]$ est un fermé de $\mathbb{R}$ or $\displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} F_n = ]0, 1]$ n'est pas un fermé de $\mathbb{R}$.

**Proposition 8**

Soient $\left(E_1\times\cdots\times E_n\,,\,\|\cdot\|_\infty\right)$ espace vectoriel produit de $n$ espaces vectoriels normés $\left(E_1,\|\cdot\|_{E_1}\right)$, ..., $\left(E_n,\|\cdot\|_{E_n}\right)$.

1. Soient $U_1$, ..., $U_n$, $n$ ouverts respectivement de $E_1$, ..., $E_n$.
   Alors $U_1\times\cdots\times U_n$ est un ouvert de $E_1\times\cdots\times E_n$.

2. Soient $F_1$, ..., $F_n$, $n$ fermés respectivement de $E_1$, ..., $E_n$.
   Alors $F_1\times\cdots\times F_n$ est un fermé de $E_1\times\cdots\times E_n$.

**Démonstration**

1. Soit $x=(x_1,\dots,x_n)\in U_1\times\cdots\times U_n$.
   On cherche $r\in\mathbb{R}_+^*$ tel que $B_E(x,r)\subset U_1\times\cdots\times U_n$.
   Comme les $U_k$ sont des ouverts de $E$, pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, il existe $r_k\in\mathbb{R}_+^*$ tel que $B(x_k,r_k)\subset U_k$.
   Notons $r=\underset{k\in[\![1,n]\!]}{\text{Min}}\, r_k$.
   Via la proposition 5 (p. 42), on a
   $$B_E(x,r)=B_{E_1}(x_1,r)\times\cdots\times B_{E_n}(x_n,r)\subset B_{E_1}(x_1,r_1)\times\cdots\times B_{E_n}(x_n,r_k)\subset U_1\times\cdots\times U_n$$
   Donc $U_1\times\cdots\times U_n$ est un ouvert de $E_1\times\cdots\times E_n$.

2. Montrons que $E_1\times\cdots\times E_n\backslash F_1\times\cdots\times F_n$ est un ouvert de $E_1\times\cdots\times E_n$.

   Remarquons que
   $$\begin{aligned} x=(x_1,\dots,x_n)\in E_1\times\cdots\times E_n\backslash F_1\times\cdots\times F_n &\iff x\notin F_1\times\cdots\times F_n\\ &\iff \exists k\in[\![1,n]\!],\ x_k\notin F_k\\ &\iff \exists k\in[\![1,n]\!],\ x_k\in E_k\backslash F_k\end{aligned}$$

   Donc
   $$E_1\times\cdots\times E_n\backslash F_1\times\cdots\times F_n=\bigcup_{k=1}^{n} U_k$$
   où pour tout $k\in[\![1,n]\!]$,
   $$U_k=E_1\times\cdots\times E_{k-1}\times\left(E_k\backslash F_k\right)\times E_{k+1}\times\cdots\times E_n$$

Or, via la première assertion de la proposition, chaque $U_k$ est un ouvert de $E_1 \times \cdots \times E_n$ donc, via le théorème 3 (p. 50), $E_1 \times \cdots \times E_n \backslash F_1 \times \cdots \times F_n$ est un ouvert de $E_1 \times \cdots \times E_n$.

### 1.3.5 Intérieur, adhérence et frontière

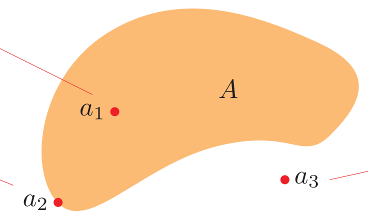
**Définition 15**

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, $A \subset E$ et $a \in A$.

1. On dit que $a$ est un *point intérieur* à $A$ si $A$ est un voisinage de $a$ c'est-à-dire s'il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $B(a, r) \subset A$.
   L'ensemble des points intérieurs à $A$ est appelé *intérieur* de $A$ et noté $\overset{\circ}{A}$.
2. On dit que $a$ est un *point adhérent* à $A$ si tout voisinage de $a$ rencontre $A$ c'est-à-dire si pour tout voisinage $V$ de $a$, $V \cap A \neq \emptyset$.
   L'ensemble des points adhérents à $A$ est appelé *adhérence* de $A$ et noté $\overline{A}$.
3. On appelle *frontière* de $A$, l'ensemble noté $\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \backslash \overset{\circ}{A}$.

$a_1$ est un point intérieur et adhérent à $A$.

$a_2$ est un point adhérent à $A$ mais n'est pas un point intérieur à $A$.




$a_3$ n'est ni un point intérieur, ni un point adhérent à $A$.

**Remarque**

$a \in \overline{A} \iff \forall r \in \mathbb{R}_+^* \quad B(a, r) \cap A \neq \emptyset$.

En effet, supposons que $a \in \overline{A}$. Alors pour tout voisinage $V$ de $a$, $V \cap A \neq \emptyset$. En particulier, pour tout $r \in \mathbb{R}_+^*$, $B(a, r)$ est un voisinage de $a$ donc $B(a, r) \cap A \neq \emptyset$.

Réciproquement supposons que pour tout $r \in \mathbb{R}_+^*$, $B(a, r) \cap A \neq \emptyset$ et soit $V$ un voisinage de $a$. Alors il existe $r' \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $B(a, r') \subset V$.

Or $B(a, r') \cap A \neq \emptyset$. Soit $x \in B(a, r') \cap A$. Alors $x \in A$ et $x \in B(a, r') \subset V$ donc $V \cap A \neq \emptyset$ d'où $a \in \overline{A}$.

**Exemple**

Dans l'espace vectoriel normé $(\mathbb{R}, |\,.\,|)$, toute partie $A$ non vide et majorée (respectivement minorée) admet une borne supérieure (respectivement inférieure) $a$. Montrons dans le cas d'une borne supérieure $a$ (le raisonnement étant similaire dans le cas d'une borne inférieure) que $a \in \overline{A}$.
Soit $r \in \mathbb{R}_+^*$. Par définition de $a$, $a - r$ n'est pas un majorant de $A$ donc il existe $x \in A$ tel que $x > a - r$ et $x \leqslant a < a + r$. Donc $]a - r, a + r[ \cap A \neq \emptyset$ d'où $a \in \overline{A}$.

**Remarque**

Par définition de $\mathring{A}$, $\mathring{A} \subset A$ et $A \subset \overline{A}$ car si $a \in A$ et $V$ est un voisinage de $A$, $a \in V \cap A$ donc $V \cap A \neq \emptyset$.
Ainsi $\mathring{A} \subset A \subset \overline{A}$.

**Proposition 9**

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $A \subset E$. Alors

1. $\mathring{A}$ est le plus grand ouvert de $E$ inclus dans $A$.
2. $A$ ouvert de $E \iff A = \mathring{A}$.
3. $E \backslash \overline{A} = \overset{\circ}{\widehat{E \backslash A}}$.
4. $\overline{E \backslash A} = E \backslash \mathring{A}$.
5. $\overline{A}$ est le plus petit fermé de $E$ contenant $A$.
6. $A$ fermé de $E \iff A = \overline{A}$.
7. $\mathrm{Fr}(A)$ est un fermé de $E$.

**Démonstration**

1. Montrons tout d'abord que $\mathring{A}$ est un ouvert de $E$.

   Soit $a \in \mathring{A}$. Montrons que $\mathring{A}$ est un voisinage de $a$.

   Via la définition de $\mathring{A}$, il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $B(a, r) \subset A$.

   Donc $B(a, r) \subset \mathring{A}$. En effet, soit $x \in B(a, r)$. Via le théorème 3 (p. 50), $B(a, r)$ est un ouvert de $E$ donc il existe $r' \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $B(x, r') \subset B(a, r)$ or $B(a, r) \subset A$ donc $B(x, r') \subset A$.

   Ainsi $x \in \mathring{A}$.

Montrons à présent que $\overset{\circ}{A}$ est *le plus grand* ouvert de $E$ inclus dans $A$.

Soit $U$ un ouvert de $E$ inclus dans $A$. Montrons que $U \subset \overset{\circ}{A}$.

Soit $x \in U$. Comme $U$ est un ouvert de $E$, il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $B(x,r) \subset U$.

Or $U \subset A$ donc $B(x,r) \subset A$ d'où $x \in \overset{\circ}{A}$.

2. Soit $A$ un ouvert de $E$.

   Le plus grand ouvert de $E$ contenu dans $A$ est $A$ donc $\overset{\circ}{A} = A$.

   Réciproquement si $A = \overset{\circ}{A}$, comme $\overset{\circ}{A}$ est un ouvert de $E$, $A$ est un ouvert de $E$.

3. Supposons $x \in E \backslash \overline{A}$. Alors $x \notin \overline{A}$ donc il existe un voisinage $V$ de $x$ tel que $V \cap A = \emptyset$. Ainsi $V \subset E \backslash A$ et comme $V$ est un voisinage de $x$, il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $B(x,r) \subset V \subset E \backslash A$.

   Donc $E \backslash A$ est un voisinage de $x$ donc $x \in \overset{\circ}{\widehat{E \backslash A}}$.

   Réciproquement, soit $x \in \overset{\circ}{\widehat{E \backslash A}}$. Alors il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $B(x,r) \subset E \backslash A$. Donc $B(x,r) \cap A = \emptyset$ d'où $x \notin \overline{A}$ donc $x \in E \backslash \overline{A}$.

4. En appliquant l'assertion précédente à $E \backslash A$, on a : $E \backslash (\overline{E \backslash A}) = \overset{\circ}{\overbrace{E \backslash (E \backslash A)}} = \overset{\circ}{A}$.

   donc $E \backslash \overset{\circ}{A} = E \backslash \big(E \backslash (\overline{E \backslash A})\big) = \overline{E \backslash A}$.

5. $\overline{A}$ est un fermé de $E$ car, via l'assertion précédente, $E \backslash \overline{A} = \overset{\circ}{\widehat{E \backslash A}}$ est un ouvert de $E$.

   Montrons à présent que $\overline{A}$ est *le plus petit* fermé de $E$ contenant $A$.

   Soit $F$ un fermé de $E$ contenant $A$. Montrons que $\overline{A} \subset F$.

   Supposons que $\overline{A} \not\subset F$. Alors il existe $x \in \overline{A}$ tel que $x \notin F$. Donc $x \in E \backslash F$. Or $E \backslash F$ est un ouvert de $E$ donc il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

   $$B(x,r) \subset E \backslash F \qquad (**)$$

   D'autre part, comme $x \in \overline{A}$, en particulier $B(x,r) \cap A \neq \emptyset$. Or $A \subset F$ donc $B(x,r) \cap F \neq \emptyset$ d'où une contradiction avec l'assertion $(**)$.

6. Soit $A$ un fermé de $E$. Le plus petit fermé de $E$ contenant $A$ est $A$ donc $\overline{A} = A$.

   Réciproquement, si $A = \overline{A}$, via l'assertion précédente $A$ est un fermé de $E$ car $\overline{A}$ est un fermé de $E$.

7. Remarquons que $\overline{A}\backslash\mathring{A} = \overline{A} \cap \left(E\backslash\mathring{A}\right)$.

   En effet, $x \in \overline{A}\backslash\mathring{A} \iff x \in \overline{A}$ et $x \notin \mathring{A} \iff x \in \overline{A}$ et $x \in E\backslash\mathring{A}$.

   Donc, via la quatrième assertion de cette proposition,

$$\mathrm{Fr}(A) = \overline{A}\backslash\mathring{A} = \overline{A} \cap \left(E\backslash\mathring{A}\right) = \overline{A} \cap \overline{E\backslash A}$$

   Ainsi, $\mathrm{Fr}(A)$, intersection de deux fermés de $E$, est un fermé de $E$.

**Proposition 10**

Soient $\left(E, \|\cdot\|\right)$ un espace vectoriel normé, $A \subset E$ et $B \subset E$. Alors

1. $A \subset B \Longrightarrow \mathring{A} \subset \mathring{B}$.
2. $A \subset B \Longrightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$.
3. $\overset{\circ}{\widehat{A \cap B}} = \mathring{A} \cap \mathring{B}$.
4. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
5. $\mathring{A} \cup \mathring{B} \subset \overset{\circ}{\widehat{A \cup B}}$.
6. $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.

**Démonstration**

1. Supposons $A \subset B$. Alors comme $\mathring{A} \subset A$, $\mathring{A} \subset B$.

   Donc $\mathring{A}$ est un ouvert de $E$ inclus dans $B$. Or $\mathring{B}$ est le plus grand ouvert de $E$ inclus dans $B$ donc $\mathring{A} \subset \mathring{B}$.

2. Supposons $A \subset B$. Alors comme $B \subset \overline{B}$, $A \subset \overline{B}$.

   Donc $\overline{B}$ est un fermé de $E$ contenant $A$. Or $\overline{A}$ est le plus petit fermé de $E$ contenant $A$ donc $\overline{A} \subset \overline{B}$.

3. $A \cap B \subset A$ et $A \cap B \subset B$ donc via la première assertion de la proposition, $\overset{\circ}{\widehat{A \cap B}} \subset \mathring{A}$ et $\overset{\circ}{\widehat{A \cap B}} \subset \mathring{B}$ donc

$$\overset{\circ}{\widehat{A \cap B}} \subset \mathring{A} \cap \mathring{B}$$

   D'autre part, $\mathring{A} \subset A$ et $\mathring{B} \subset B$ donc $\mathring{A} \cap \mathring{B} \subset A \cap B$.

Donc $\mathring{A} \cap \mathring{B}$ est un ouvert de $E$ inclus dans $A \cap B$. Or $\overset{\circ}{\widehat{A \cap B}}$ est le plus grand ouvert inclus dans $A \cap B$ donc

$$\mathring{A} \cap \mathring{B} \subset \overset{\circ}{\widehat{A \cap B}}$$

Ainsi $\overset{\circ}{\widehat{A \cap B}} = \mathring{A} \cap \mathring{B}$.

4. $A \subset A \cup B$ et $B \subset A \cup B$ donc via la deuxième assertion de la proposition, $\overline{A} \subset \overline{A \cup B}$ et $\overline{B} \subset \overline{A \cup B}$ donc

$$\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$$

D'autre part, $A \subset \overline{A}$ et $B \subset \overline{B}$ donc $A \cup B \subset \overline{A} \cup \overline{B}$.

Donc $\overline{A} \cup \overline{B}$ est un fermé contenant $A \cup B$ or $\overline{A \cup B}$ est le plus petit fermé contenant $A \cup B$ donc

$$\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$$

Ainsi $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

5. $A \subset A \cup B$ et $B \subset A \cup B$ donc $\mathring{A} \subset \overset{\circ}{\widehat{A \cup B}}$ et $\mathring{B} \subset \overset{\circ}{\widehat{A \cup B}}$.

Donc $\mathring{A} \cup \mathring{B} \subset \overset{\circ}{\widehat{A \cup B}}$.

6. $A \cap B \subset A$ et $A \cap B \subset B$ donc $\overline{A \cap B} \subset \overline{A}$ et $\overline{A \cap B} \subset \overline{B}$.

Donc $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.

**Remarque**

Les inclusions réciproques des cinquième et sixième assertions de la proposition précédente sont fausses comme l'illustrent les deux exemples ci-dessous.

Soient l'espace vectoriel normé $\big(\mathbb{R}, |\cdot|\big)$, $A = [-1,0]$, $B = [0,1]$, $C = ]-1,0[$ et $D = ]0,1[$.

Alors $\mathring{A} \cup \mathring{B} = ]-1,0[ \cup ]0,1[$ alors que $\overset{\circ}{\widehat{A \cup B}} = ]-1,1[$.

D'autre part, $\overline{C} \cap \overline{D} = [-1,0] \cap [0,1] = \{0\}$ alors que $\overline{C \cap D} = \emptyset$.

### 1.3.6 Point adhérent et limite

**Proposition 11**

Soient $\big(E, \|\cdot\|\big)$ un espace vectoriel normé, $A \subset E$ et $x \in E$.

Alors $x \in \overline{A}$ ssi il existe une suite de $A$ convergeant vers $x$.

**Démonstration**

Soit $x \in \overline{A}$. Alors pour tout voisinage $V$ de $x$, $V \cap A \neq \emptyset$.

En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $B\left(x, \dfrac{1}{n}\right) \cap A \neq \emptyset$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $a_n \in B\left(x, \dfrac{1}{n}\right) \cap A$ c'est-à-dire pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n \in A$ et $\|a_n - x\| < \dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

On a donc construit une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de $A$ convergeant vers $x$.

Réciproquement, supposons qu'il existe une suite $(a_n)$ de $A$ convergeant vers $x$. Montrons que $x \in \overline{A}$.

Soit $V$ un voisinage de $x$. Alors il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $B(x,r) \subset V$.

Comme $(a_n)$ converge vers $x$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$n \geqslant N \Longrightarrow \|a_n - x\| < r$$

Donc $a_N \in B(x,r)$ et $a_N \in A$ donc $a_N \in B(x,r) \cap A$. Or $B(x,r) \subset V$ donc $a_N \in V \cap A$ d'où $V \cap A \neq \emptyset$.

Ainsi $x \in \overline{A}$.

**Théorème 4 (Cantor[35,36] (1884)[37,38])**

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $A \subset E$.

Alors $A$ est un fermé de $E$ ssi toute suite de $A$ convergeant dans $E$, converge dans $A$.

**Démonstration**

Supposons que $A$ est un fermé de $E$. Alors $A = \overline{A}$.

Soit $(a_n)$ une suite de $A$ convergeant vers $x \in E$. Alors, via la proposition précédente, $x \in \overline{A}$. Or $A = \overline{A}$ donc $x \in A$.

---

35. Ce résultat n'est pas connu sous le nom de théorème de Cantor mais peut être attribué à ce mathématicien (cf. notes 37 et 38).
36. cf. notice biographique p. 369.
37. cf. p. 470 du numéro 6 de son article *Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten*, Mathematische Annalen, **23**, pp. 453-488.
38. Les notions de norme et d'espace vectoriel normé ne sont formalisées qu'en 1920 par Banach (cf. note 13 p. 31 et notice biographique p. 83) et la topologie ne prend son essor qu'après la thèse de Fréchet (cf. notice biographique p. 96) de 1906 (cf. *Sur quelques points du calcul fonctionnel*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, **22**, pp. 1-74) et l'ouvrage d'Hausdorff de 1914 (cf. *Grundzüge der Mengenlehre*, Veit & Comp., Leipzig et notice biographique p. 72). Néanmoins Cantor, près de 30 ans auparavant, définit déjà la notion fondamentale de fermé et montre son importance avec ce résultat.

# Index

## A



## B

# D

# E



# F

# G



# H



# I



# J



# K

## S



## T

# U



# V



# W

## Y



## Z

**Cet ouvrage développe le programme d'analyse de deuxième année des classes préparatoires scientifiques, de façon originale, approfondie et fidèle.**

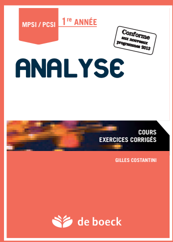
- Le texte, rigoureux et pédagogique, permet à tous les étudiants de suivre pas à pas les démonstrations. De nombreuses figures facilitent la compréhension et l'assimilation des notions abordées.
- Des exercices, dont les corrigés sont très détaillés, permettent de vérifier l'acquisition des points clés de chaque chapitre.
- L'auteur a pris soin de replacer les résultats présentés dans leur contexte historique : les théorèmes sont datés, leurs sources précises indiquées et des notices biographiques évoquent les faits marquants de la vie des mathématiciens cités.
- Dans les parties « compléments », l'ouvrage aborde des théorèmes plus difficiles ou moins connus, destinés aux lecteurs souhaitant un approfondissement des sujets classiques.

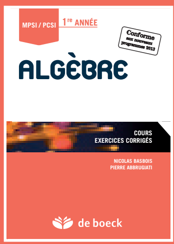
L'ouvrage intéressera également les candidats au CAPES et à l'agrégation.

**LES +**

+ Conforme au nouveau programme 2014
+ De nombreux exercices corrigés
+ Texte abondamment illustré pour faciliter la compréhension
+ Tout en couleurs

**Olivier Rodot est responsable du département mathématiques des classes préparatoires de l'EPITA.**


< Dans la même collection dirigée par Olivier Rodot

ISBN : 978-2-8041-8810-8

9 782804 188108

PREANA2

www.deboeck.com