

MP-MP\*

2<sup>e</sup> ANNÉE

Conforme  
au nouveau  
programme 2014

# ANALYSE

COURS  
EXERCICES CORRIGÉS

OLIVIER RODOT



de boeck



**ANALYSE**

**Collection Prépas scientifiques**  
**Dirigée par Olivier Rodot**

N. BASBOIS et P. ABBRUGIATI, Algèbre. 1<sup>re</sup> année

C. ANTONINI, Algèbre. 2<sup>e</sup> année

G. COSTANTINI, Analyse. 1<sup>re</sup> année

O. RODOT, Analyse. 2<sup>e</sup> année.

**Chez le même éditeur**

C. JAN, Mathématiques. Une approche imagée et synthétique. 2<sup>e</sup> éd.

MP-MP\*

2<sup>e</sup> ANNÉE

Conforme  
au nouveau  
programme 2014

# ANALYSE

COURS  
EXERCICES CORRIGÉS

OLIVIER RODOT



de boeck

Pour toute information sur notre fonds et les nouveautés dans votre domaine de spécialisation, consultez notre site web: [www.deboeck.com](http://www.deboeck.com)

© De Boeck Supérieur s.a., 2014  
Fond Jean Pâques, 4 – 1348 Louvain-la-Neuve

1<sup>re</sup> édition

Tous droits réservés pour tous pays.  
Il est interdit, sauf accord préalable et écrit de l'éditeur, de reproduire (notamment par photocopie) partiellement ou totalement le présent ouvrage, de le stocker dans une banque de données ou de le communiquer au public, sous quelque forme et de quelque manière que ce soit.

Imprimé en Belgique

Dépôt légal:  
Bibliothèque nationale, Paris : septembre 2014  
Bibliothèque royale de Belgique, Bruxelles : 2014/0074/204

ISBN : 978-2-8041-8810-8

# *Avant-propos*

« La rigueur nécessaire à toute recherche va de pair avec l'élan poétique : j'ai autant de plaisir à déchiffrer des partitions de Chopin que des livres d'équations. Il y a une similitude étonnante entre cette musique qui rentre par une fenêtre, s'impose et disparaît et la résolution élégante d'une belle équation. »

Alain Connes

Ma passion des mathématiques remonte aux classes de première et terminale.

Je me rappelle avec émotion mon professeur de l'époque, Guy Boujard : il possédait cette faculté rare de susciter l'émerveillement devant une formule ou un théorème. Je le revois encore nous présenter, les yeux pétillants, la fonction Gamma d'Euler<sup>1</sup>, qui généralise la fonction factorielle, et nous dévoiler toute son élégante beauté. Car on peut transposer aux mathématiques ce que l'un des fils de Bach souligne à propos du musicien<sup>2</sup> : « [un enseignant de mathématiques] ne pourra émouvoir sans être déjà lui-même ému. »

Dans ce livre, j'ai souhaité montrer qu'à l'opposé de leur réputation austère, les mathématiques nous content une histoire semée de rebondissements. J'ai donc pris soin, non seulement d'effectuer des recherches approfondies pour dater les théorèmes et indiquer leurs sources, mais aussi de présenter des notices biographiques relatives aux mathématiciens cités. J'espère ainsi réussir modestement à souligner que cette discipline constitue une langue véritablement vivante.

---

1. cf. définition p. 311.

2. cf. Carl Philipp Emanuel Bach, *Versuch über die wahre Art das Clavier zu spielen [...]*, Henning, Berlin (1753).

« La réalité mathématique n'est localisable ni dans l'espace, ni dans le temps. Lorsqu'on a la chance d'en dévoiler ne serait-ce qu'une infime partie, elle donne une sensation de jouissance extraordinaire par le sentiment d'intemporalité qui s'en dégage. »

Alain Connes

Mon expérience d'enseignant et les remarques judicieuses de mes étudiants m'ont amené à présenter, en amont de chaque chapitre, l'intérêt concret des notions abordées : il est plus aisé d'entamer un nouveau thème après s'être familiarisé avec certains concepts durant une brève introduction.

En outre, la clarté didactique a été une préoccupation permanente : les définitions et les théorèmes sont le plus souvent suivis d'un exemple ou d'une figure, les démonstrations étant soigneusement rédigées en n'omettant aucun détail. Je n'ai ainsi jamais cherché à exposer les preuves les plus courtes, certes éventuellement élégantes pour les initiés, mais souvent hermétiques pour les néophytes.

D'autre part, en marge du programme officiel, j'ai désiré exposer, toujours sous cette approche historique, des théorèmes plus difficiles ou moins connus, insérés le plus souvent dans les parties « compléments » des chapitres ou repérables facilement grâce aux conventions de couleurs. Ils sont destinés aux étudiants souhaitant un approfondissement des sujets classiques.

Enfin, les exercices, corrigés avec le même soin du détail, devraient permettre de vérifier l'assimilation des points clés de chaque chapitre.

### Remarque sur le nom des théorèmes

J'ai souhaité distinguer, aussi bien dans les différents chapitres que dans l'index, les théorèmes connus sous des noms célèbres de ceux *due* à des mathématiciens mais pas connus sous leurs noms. Par exemple, le théorème *de* Weierstrass (p. 389) est bien connu sous ce nom tandis que le théorème 66 (p. 372) n'est pas connu sous le nom de théorème de Weierstrass mais peut néanmoins lui être attribué (cf. le guide de lecture ci-après pour se familiariser avec cette distinction).

### Remarques sur le nouveau programme MP-MP\*

Bien que les séries de Fourier soient retirées du programme, il m'a semblé néanmoins judicieux de les traiter (en annexe) car la connaissance des concepts de ce chapitre est un atout non négligeable lors de l'entrée en écoles d'ingénieurs.



---

La section consacrée aux fonctions convexes figure déjà dans le livre d'analyse de première année<sup>3</sup>.

Celle consacrée aux familles sommables, introduite dans le nouveau programme en vue de l'étude des probabilités, figurera dans l'ouvrage de probabilités de la même collection (parution en 2015).

Le chapitre sur les équations différentielles, intimement lié à l'algèbre linéaire et notamment la réduction des endomorphismes et des matrices carrées, est inséré dans l'ouvrage d'algèbre de deuxième année<sup>4</sup>.

## Remerciements

Ce livre n'aurait sans doute pas été achevé sans la contribution de toutes les personnes qui m'ont aidé ou encouragé.

Je tiens à remercier tout d'abord vivement Cédric Peschard pour sa relecture patiente et très minutieuse de l'intégralité de l'ouvrage. Ses remarques, toujours très pertinentes, m'ont été très précieuses.

Je témoigne également ma profonde gratitude à Alexandre Duret-Lutz pour son apport considérable dans la réalisation de nombreuses figures complexes en  $\text{\LaTeX}$ . Sa compétence dans la conception de figures 3D m'a été d'un grand secours.

J'exprime également toute ma reconnaissance à Guillaume Euvrard et Guillaume Goron, qui m'ont soutenu le dernier mois en me conseillant par exemple la présentation du modèle de Lotka-Volterra (dans l'introduction du chapitre consacré au calcul différentiel) et l'étude de certains beaux arcs paramétrés.

Je tiens également à remercier Jérôme Cartailier qui m'a facilité l'accès à certains articles ou ouvrages non numérisés, Jean Rodot pour ses conseils avisés sur la langue française, François Pantigny, à l'origine de beaucoup de macro-instructions et Alexandre Abraham pour l'insertion des caractères cyrilliques.

Enfin, un grand merci à mon épouse et mes enfants qui ont dû supporter une disponibilité bien réduite depuis des mois.

N'hésitez pas à me faire part de vos remarques sur cet ouvrage et ceux de la collection en m'envoyant un courrier électronique à l'adresse suivante : `rodot.livre.maths@gmail.com`

Olivier Rodot

---

3. cf. Costantini, *Analyse 1<sup>re</sup> année*, De Boeck (2013).

4. cf. Antonini, *Algèbre 2<sup>e</sup> année*, De Boeck (2014).



# Guide de lecture

## CHAPITRE 2

### Séries numériques

#### 2.1 Introduction

##### 2.1.1 Un paradoxe de Zénon

La théorie des séries numériques est une branche de l'analyse mathématique qui étudie les sommes de suites de nombres.

Comme toute approche rigoureuse, elle se heurte à des paradoxes.

Le premier d'entre eux est le paradoxe de Zénon, formulé de la sorte :

Une course est organisée d'avance sur Achille ; mais à 10 mètres par seconde, il aura avancé d'une certaine distance avant que le retard, la Tortue aura eu le temps de parcourir la même distance.

Comme il y a une infinité de ces étapes, on se demande si la course aura jamais lieu. Or, ce n'est pas le cas.

nécessairement infinie

1. rapporté par Aristote

140

Chapitre 2. Séries

En effet, Achille met une seconde pour parcourir les 10 mètres le séparant de la Tortue puis  $\frac{1}{10}$  seconde pour parcourir le mètre que la Tortue possède puis  $\frac{1}{100}$  seconde pour parcourir les  $\frac{1}{10}$  mètre que la Tortue dispose encore.

Ainsi le temps mis par Achille pour rattraper la Tortue vaut la somme

$$1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{1}{10000} + \dots$$

Cette somme infinie sera notée, en termes de séries, sous la forme :  $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{10^k}$

Son calcul est assez naturel :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{10^k} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{10^k} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{1}{10^{n+1}}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{10}{9}$$

Achille rattrape donc bien la Tortue au bout d'une durée égale à  $\frac{10}{9}$  s.

##### 2.1.2 Le paradoxe des morceaux de sucre

La série précédente est appelée *série géométrique*<sup>2</sup>.

Une autre série célèbre donnant lieu à des paradoxes est la *série harmonique*<sup>3</sup>.

Considérons la somme  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$

L'intuition ne peut guère nous aider pour deviner si cette somme d'une infinité de termes est finie (c'est-à-dire un nombre réel), ou bien si elle est égale à  $+\infty$  et ce fait amène à des résultats étonnants de la physique « concrètes », comme l'illustre le *paradoxe des morceaux de sucre* présenté maintenant.

On dispose de  $N$  morceaux de sucre identiques et on souhaite savoir ce qu'est le *port-à-faux maximal* que l'on peut obtenir en les superposant.

On choisit une unité de longueur telle que la longueur des morceaux de sucre soit 1.

<sup>2</sup> cf. p. 141.  
<sup>3</sup> cf. p. 147.

Chaque chapitre est précédé d'une brève introduction qui permet d'entrevoir l'intérêt concret des notions abordées.

#### 2.1 Introduction

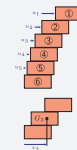
141



Avec trois sucres, il faut poser l'empilement précédent sur un troisième sucre de manière à ce que l'empilement précédent ne bascule pas.



Généralisation



Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $a_n$  le décalage du sucre numéro  $n$  quand on pose ce sucre (et tous ceux qui sont au-dessus) sur un nouveau sucre (qui est, bien entendu, le sucre numéro  $n+1$ ).

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $G_n$  le centre de gravité de l'empilement des  $n$  premiers sucres et  $x_n$  l'abscisse de  $G_n$  mesurée par rapport au bord gauche du sucre numéro  $n$ .

On empile maintenant les sucres à la limite du basculement de manière à avoir systématiquement le port-à-faux le plus important.

**Théorème de Schwarz**<sup>76</sup> (1873)<sup>77,78,79</sup>

Soient  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ ,  $f$  une application de  $\mathbb{R}^2$  vers  $\mathbb{R}$  de classe  $C^2$  sur  $U$ .

Alors

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

**Démonstration**

Soit  $a = (a_1, a_2) \in U$ . Comme  $U$  est un ouvert, il existe  $r \in \mathbb{R}_+^*$  tel que  $B(a, r) \subset U$ .

Soit  $h = (h_1, h_2) \neq (0, 0) \in B(0, r)$ . Alors  $a + h \in B(a, r) \subset U$ .

Montrons que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a_1, a_2) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a_1, a_2)$$

Considérons

$$\Delta(h_1, h_2) = f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) - f(a_1 + h_1, a_2) - f(a_1, a_2) + f(a_1, a_2 + h_2)$$

$$\text{Soit } \delta_1 : \begin{cases} [a_1, a_1 + h_1] & \rightarrow \mathbb{R} \\ t & \rightarrow f(t, a_2 + h_2) - f(t, a_2) \end{cases}$$

Alors

$$\Delta(h_1, h_2) = \delta_1(a_1 + h_1) - \delta_1(a_1)$$

Via le théorème des accroissements finis appliqué à la fonction d'une variable réelle  $\delta_1$ , il existe  $\theta_1 \in ]0, 1[$  tel que

$$\Delta(h_1, h_2) = h_1 \delta_1'(a_1 + \theta_1 h_1) = h_1 \left( \frac{\partial f}{\partial x}(a_1 + \theta_1 h_1, a_2 + h_2) - \frac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2 + h_2) \right)$$

<sup>76</sup> parfois appelé théorème de Clairaut (1713-1765).

<sup>77</sup> cf. Ueber ein vollständiges System von einander unabhängiger Voraussetzungen  $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x}$ , Archiv der sciences physiques et des mathématiques der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft, Jahrgang 78. Ce théorème peut se généraliser à une application de  $\mathbb{R}^n$  vers  $\mathbb{R}^p$  (cf. r. 79). Ce résultat était en réalité déjà connu dès 1861 par Weierstrass comme et dans l'ouvrage de Schwarz durant son semestre d'été à Berlin (cf. p. 43). Ausarbeitung der Vorlesung an dem Königl. Gewerbeinstitut zu Berlin von H. A. Schwarz, Institut Mittag-Leffler, Djursholm.

Les références précises de l'article où le théorème est démontré sont données en notes de bas de page.

Pour chaque théorème est indiquée l'année de la publication (ou de la démonstration).

L'ouvrage distingue les théorèmes portant le nom d'un mathématicien et qui sont couramment appelés ainsi ...

... des théorèmes qui peuvent être associés à un mathématicien sans pour autant avoir hérité de son nom dans l'usage.

**1.7 Continuité des applications linéaires****1.7.1 Caractérisation des applications linéaires continues****Théorème 7 (Banach**<sup>49</sup> (1920)<sup>50</sup>)

Soient  $(E, \|\cdot\|_E)$  et  $(F, \|\cdot\|_F)$  deux espaces vectoriels normés et  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ .

Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i)  $f$  est continue sur  $E$ .
- (ii)  $f$  est continue en 0.
- (iii)  $f$  est bornée sur  $\overline{B_E(0,1)}$ .
- (iv) Il existe  $K \in \mathbb{R}_+$  tel que pour tout  $x \in E$ ,  $\|f(x)\|_F \leq K \|x\|_E$ .
- (v)  $f$  est lipschitzienne.
- (vi)  $f$  est uniformément continue.

**Démonstration**

$(i) \Rightarrow (ii)$   $(vi) \Rightarrow (i)$  sont évidentes et  $(v) \Rightarrow (vi)$  provient de la proposition 27 (p. 81).

$(ii) \Rightarrow (iii)$  Supposons  $f$  continue en 0. Alors il existe  $\eta > 0$  tel que pour tout  $x \in E$ ,

$$\|x\|_E < \eta \Rightarrow \|f(x)\|_F \leq 1$$

Soit  $x \in \overline{B_E(0,1)}$ . Alors  $\|\frac{x}{2}\|_E = \frac{1}{2}\|x\|_E < \frac{\eta}{2} < \eta$  donc  $\|f(\frac{x}{2})\|_F \leq 1$ .

Or, comme  $f$  est linéaire,  $f(\frac{x}{2}) = \frac{1}{2}f(x)$  donc  $\|f(x)\|_F = \frac{2}{\eta}\|f(\frac{x}{2})\|_F \leq \frac{2}{\eta}$ .

Ainsi  $f$  est bornée sur  $\overline{B_E(0,1)}$ .

$(iii) \Rightarrow (iv)$  Supposons  $f$  bornée sur  $\overline{B_E(0,1)}$ . Alors il existe  $K \in \mathbb{R}_+$  tel que pour tout  $x \in E$ ,

$$\|x\|_E \leq 1 \Rightarrow \|f(x)\|_F \leq K$$

Comme  $f$  est linéaire,  $f(0) = 0$  donc l'inégalité  $\|f(x)\|_F \leq K \|x\|_E$  est vérifiée pour  $x = 0$ .

<sup>49</sup> Ce résultat n'est pas connu sous le nom de théorème de Banach mais peut être attribué à ce mathématicien (cf. note suivante).

<sup>50</sup> cf. pp. 152-153 de la thèse de Banach soutenue en 1920 et publiée en 1922 (cf. *Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales*, Fundamenta Mathematicae, 3, pp. 133-181).

Des notices biographiques, minutieusement documentées, jalonnent l'ouvrage et permettent de replacer les théorèmes dans leur contexte historique.



**Henri Lebesgue**  
(1875-1941)

Issu d'un milieu très modeste, fils d'un compositeur typographe de Beauvais (décédé prématurément en 1879 dans sa trente-sixième année), Henri Lebesgue se révèle très brillant élève dès l'école primaire. Grâce à l'action du maire de sa ville natale, il obtient des bourses lui permettant de poursuivre ses classes préparatoires dans de grands lycées parisiens. Il intègre l'École normale supérieure en 1894 et en sort agrégé en 1897. Il révolutionne l'histoire de l'analyse en publiant en 1901 son article *Sur une généralisation de l'intégrale définie*<sup>35</sup>. Il définit une nouvelle intégrale, appelée désormais *intégrale de Lebesgue*, généralisant celle de Riemann<sup>36</sup>. Il donne en particulier dans cet article un exemple de fonction non intégrable au sens de Riemann mais intégrable<sup>37</sup> avec sa nouvelle définition. Ce qui n'était encore qu'une esquisse en 1901 aboutit l'année suivante, lors de la soutenance de sa thèse, à sa magistrale *théorie de la mesure*<sup>38</sup>. Il poursuit ses travaux sur l'intégration et montre en 1904<sup>39</sup> que son intégrale est un outil à la fois puissant et souple pour « permuter limite et intégrale »<sup>40</sup>. Malgré la richesse de ses résultats, il n'obtient pas immédiatement de poste dans la capitale : après un passage dans un lycée de Nancy durant lequel il régit sa thèse, il est nommé en 1902 à la faculté des sciences de Rennes puis en 1906 à celle de Poitiers. Il obtient finalement sa nomination à la Sorbonne en 1910 puis au prestigieux Collège de France de 1921 à son décès. L'année suivante, il devient membre de l'Académie des sciences. Ses travaux de recherche couvrent notamment les séries de Fourier<sup>41</sup> et beaucoup de thèmes de géométrie comme les coniques<sup>42</sup> ou les constructions géométriques<sup>43</sup>. Quelques jours après son décès, Paul Montel (1876-1975) lui rend hommage<sup>44</sup> à l'Académie des sciences. Il conclut par ses mots : « Humain, profondément humain, il avait une grande noblesse de cœur et de pensée, une sensibilité délicate, une générosité discrète et inépuisable. [...] Sa mort prive notre pays d'un de ses grands ouvriers de la pensée. Elle prive d'un homme de bien tous ceux qui l'ont approché. »

n. cf. Comptes rendus de l'Académie des sciences, 132, pp. 1025-1028.  
 l. cf. notice biographique p. 153.  
 o. Il emploie le terme « sommable ».  
 p. Cette thèse a été publiée la même année sous le titre *Intégrale, Longueur, Aire*, Annali di Matematica pura ed applicata, 7, pp. 231-359.  
 q. cf. *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*, Gauthier-Villars, Paris.  
 r. cf. *Théorie de convergence dominée* p. 441.  
 s. cf. *Leçons sur les séries trigonométriques*, Gauthier-Villars, Paris (1906).  
 t. cf. *Les coniques*, Gauthier-Villars, Paris (1942).  
 u. cf. *Leçons sur les constructions géométriques*, Gauthier-Villars, Paris (1950).  
 v. cf. Notice nécrologique sur M. Henri Lebesgue, Comptes rendus de l'Académie des sciences, 213, pp. 197-200 (1941).

**Démonstration (du lemme 22)**

Soit pour tout  $(m, n) \in \mathbb{N}^2$  tel que  $n \leq m$  la fonction  $F_{n,m}$  définie pour tout  $x \in [a, b]$  par

$$F_{n,m}(x) = \max_{k \in [1, m]} f_k(x)$$

**4.3 Propriétés de la convergence uniforme**

Donc  $(f_n)$  converge uniformément vers  $f$  sur  $[a, b]$ .

**Remarque**

Toutes les hypothèses du théorème de Dini sont cruciales : il est possible que l'une d'elles soit retirée ou modifiée.

- Soit  $(f_n) \in (\mathbb{R}^{[0,1]})^{\mathbb{N}}$  où pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n : \begin{cases} [0, 1[ & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto x \end{cases}$

Chaque  $(f_n)$  est croissante sur  $[0, 1[$ ,  $(f_n)$  converge simplement vers  $f(x) = x$  sur  $[0, 1[$  mais la convergence n'est pas uniforme sur  $[0, 1[$  car  $\sup_{x \in [0, 1[} |f_n(x) - f(x)| = 1$ .

- Reprenons le même exemple ci-dessus mais sur  $[0, 1]$ .

Alors chaque  $(f_n)$  est croissante sur  $[0, 1]$ ,  $(f_n)$  converge simplement sur  $[0, 1]$  vers

$$f : \begin{cases} [0, 1] & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases} \end{cases} \text{ mais la convergence n'est pas uniforme.}$$

- L'exemple de l'observation p. 367 prouve enfin que l'hypothèse de croissance de chaque  $f_n$  est indispensable.

**Théorème de Dini<sup>33</sup> (1878)<sup>34</sup>**

Soient  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ ,  $(f_n) \in (\mathbb{R}^{[a,b]})^{\mathbb{N}}$  et  $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$  telles que

- $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n$  est continue sur  $[a, b]$
- la suite  $(f_n)$  est monotone<sup>35, 36</sup>
- $(f_n)$  converge simplement vers  $f$  sur  $[a, b]$
- $f$  continue sur  $[a, b]$

Alors  $(f_n)$  converge uniformément vers  $f$  sur  $[a, b]$ .

33. cf. notice biographique p. 231.  
 34. cf. *Fondamenti per la teoria delle funzioni di variabili reali*, T. Nistri, Pisa, p. 110.  
 35. c'est-à-dire que la suite  $(f_n)$  est croissante (ou décroissante) : pour tout  $x \in [a, b]$ , la suite  $(f_n(x))$  est croissante (ou décroissante).  
 36. Ne pas confondre une suite croissante de fonctions avec une suite de fonctions croissantes comme dans le premier théorème de Dini (p. 381).

Les théorèmes moins connus ou plus difficiles sont repérables par leur fond rose.

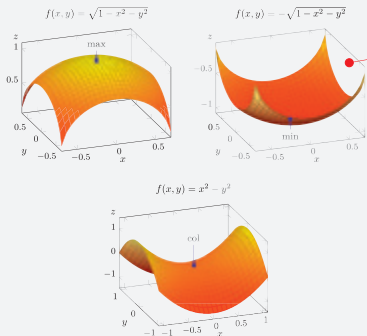
où  $\begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$  est la matrice hessienne de  $f$  en  $a$ .

**Théorème 101 (Lagrange<sup>89</sup> (1759)<sup>90</sup>)**

Soient  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ ,  $f$  une application de  $U$  vers  $\mathbb{R}$  de classe  $C^2$  sur  $U$  et  $a \in U$  un point critique.

- Si  $s^2 - rt < 0$  et  $r > 0$  alors  $f$  admet un minimum local en  $a$ .
- Si  $s^2 - rt < 0$  et  $r < 0$  alors  $f$  admet un maximum local en  $a$ .
- Si  $s^2 - rt > 0$ ,  $f$  n'admet pas d'extremum en  $a$ .

On dit que  $f$  admet un point-cos<sup>91</sup> en  $a$ .



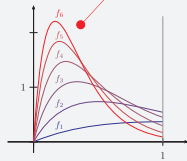
Chaque fois que nécessaire, des figures illustrent les théorèmes, définitions et exemples.

4.3 Propriétés de la convergence uniforme

5. Dans le cas où  $I = [a, b]$ , on montre que  $\int_a^b f_n(x) dx \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \int_a^b f(x) dx$ .

Exemple

Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^{[0,1]})^{\mathbb{N}}$  où pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n : \begin{cases} [0,1] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto n^2 x e^{-nx} \end{cases}$



Graphes des fonctions  $f_n$  de  $n = 1$  à 6.

Soit  $x \in [0, 1]$ .

Alors  $f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$  donc  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge simplement vers la fonction nulle sur  $]0, 1[$ .

$$\begin{aligned} \text{Or } \int_0^1 f_n(x) dx &= n^2 \left( -\frac{1}{n} [x e^{-nx}]_0^1 + \frac{1}{n} \int_0^1 e^{-nx} dx \right) \\ &= n^2 \left( -\frac{e^{-n}}{n} + \frac{1}{n^2} [e^{-nx}]_0^1 \right) \\ &= 1 - e^{-n}(n+1) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1 \text{ et } \int_0^1 0 dx \neq 1 \end{aligned}$$

Donc  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ne converge pas uniformément vers la fonction nulle sur  $]0, 1[$ .

4.3.7 Convergence uniforme et intégrales impropres

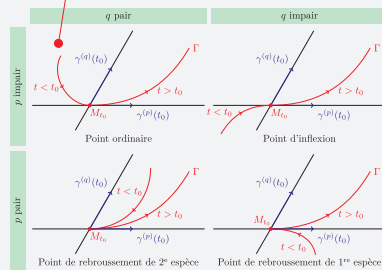
Le théorème 65 (p. 371) est faux pour les intégrales impropres comme l'illustre le contre-exemple suivant.

7.3 Arcs paramétrés du plan

Définition 85

Soient  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\gamma$  un arc paramétré de classe  $C^k$ ,  $\Gamma$  son support et  $M_{t_0} \in \Gamma$ . On suppose que les entiers  $p$  et  $q$  définis précédemment existent.

- Si  $p$  est impair et  $q$  pair, on dit que  $M_{t_0}$  est un point ordinaire.
- Si  $p$  et  $q$  sont impairs, on dit que  $M_{t_0}$  est un point d'inflexion.
- Si  $p$  est pair et  $q$  impair, on dit que  $M_{t_0}$  est un point de rebroussement de première espèce.
- Si  $p$  et  $q$  sont pairs, on dit que  $M_{t_0}$  est un point de rebroussement de deuxième espèce.



Remarques

1. Un point de rebroussement (de première ou de deuxième espèce)  $M_{t_0}$  est nécessairement un point stationnaire car  $p$  pair implique  $\gamma'(t_0) = (0, 0)$ . Ainsi, un point régulier est soit un point ordinaire, soit un point d'inflexion.

6.6 Séries entières et équations différentielles

503

Proposition 101

Soit  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}^+$ . Alors la fonction  $x \mapsto (1+x)^\alpha$  est développable en série entière sur  $]-1, 1[$  et pour tout  $x \in ]-1, 1[$ , on a

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$$

Démonstration

Soit  $f : x \mapsto (1+x)^\alpha$ . Alors  $f$  est de classe  $C^\infty$  sur  $]-1, +\infty[$ .

De plus, pour tout  $x \in ]-1, +\infty[$ ,  $f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$  soit encore

$$(1+x)f'(x) = \alpha f(x)$$

Ainsi, en remarquant que  $f(0) = 1$ ,  $f$  est l'unique solution<sup>45</sup> de l'équation différentielle

$$(1+x)y'(x) = \alpha y(x) \quad (*)$$

avec la condition initiale  $y(0) = 1$ .

Raisonnons à présent par analyse-synthèse.

• Analyse.

Supposons  $f$  développable en série entière sur  $]-R, R[$  où  $R \in \mathbb{R}_+$ .

Alors, pour tout  $x \in ]-R, R[$ ,  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ . Ainsi  $f$  solution de l'équation (\*) ssi

$$(1+x) \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

c'est-à-dire ssi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n = \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

504

Chapitre 6. Séries entières

Ainsi, après un changement d'indice dans la première somme et en remarquant que le terme pour  $n = 0$  est nul dans la deuxième somme,  $f$  est solution de l'équation (\*) ssi

$$\sum_{n=0}^{+\infty} ((n+1)a_{n+1} + (n-\alpha)a_n) x^n = 0$$

Donc, via la remarque p. 502, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $(n+1)a_{n+1} + (n-\alpha)a_n = 0$  c'est-à-dire  $a_{n+1} = \frac{\alpha-n}{n+1} a_n$  avec  $a_0 = 1$ .

Ainsi

$$a_{n+1} = \frac{(\alpha-n)}{n+1} \frac{(\alpha-n-1)}{n} \cdots \frac{\alpha}{1} a_0$$

soit encore, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$a_n = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$$

Donc si  $f$  est développable en série entière sur  $]-R, R[$ , alors pour tout  $x \in ]-R, R[$ ,

$$f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$$

• Synthèse.

Soit la série entière  $\sum a_n x^n$  où  $a_0 = 1$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $a_n = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$

Il suffit à présent de montrer que le rayon de convergence  $R$  de cette série est égal à 1. En effet, si c'est le cas, la partie analyse a montré que sur  $]-R, R[$ , sa somme est égale à  $f$ .

Comme  $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{|\alpha-n|}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ , via le théorème 80 (p. 479),  $R = 1$ .

Donc  $f$  est développable en série entière sur  $]-1, 1[$  et pour tout  $x \in ]-1, 1[$ , on a

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$$

6.7 Fonction exponentielle complexe

L'étude générale des fonctions de variable complexe n'est pas au programme des classes préparatoires.

Nous proposons, dans cette section, de présenter uniquement la fonction exponentielle complexe.

Les démonstrations, très soignées, n'omettent aucune étape dans un souci de clarté.

Des exercices corrigés sont proposés à la fin de chaque chapitre. Les énoncés sont repérables par leur fond coloré.

6.9 Exercices corrigés

537

donc pour tout  $x \in ]-1, 1[$ , on a

$$\begin{aligned} \arcsin(x) &= \arcsin(0) + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{1}{2n+1} x^{2n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{1}{2n+1} x^{2n+1} \end{aligned}$$

6.10

Déterminer le développement en série entière (en 0) sur  $]-1, 1[$  de la fonction

$$x \mapsto \ln(x^2 - x\sqrt{2} + 1)$$

C.6.10

Notons  $f : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \ln(x^2 - x\sqrt{2} + 1) \end{cases}$

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f'(x) = \frac{2x - \sqrt{2}}{x^2 - x\sqrt{2} + 1}$

Soit la fraction rationnelle  $F = \frac{2X - \sqrt{2}}{X^2 - X\sqrt{2} + 1}$

La partie entière de  $F$  est nulle.

Les pôles de  $F$  dans  $\mathbb{C}$  sont  $e^{i\pi/4}$  et  $e^{-i\pi/4}$ .

Via une décomposition en éléments simples dans  $\mathbb{C}(X)$ , on a

$$F = \frac{2X - \sqrt{2}}{(X - e^{i\pi/4})(X - e^{-i\pi/4})} = \frac{1}{X - e^{i\pi/4}} + \frac{1}{X - e^{-i\pi/4}}$$

Donc pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$f'(x) = \frac{1}{x - e^{i\pi/4}} + \frac{1}{x - e^{-i\pi/4}} \quad (*)$$

Or pour tout  $x \in ]-1, 1[$ ,

$$\frac{1}{x - e^{i\pi/4}} = \frac{-1}{e^{i\pi/4} - x} = \frac{-e^{-i\pi/4}}{1 - x e^{-i\pi/4}} = -e^{-i\pi/4} \sum_{n=0}^{+\infty} (e^{-i\pi/4})^n = - \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-i(n+1)\pi/4} x^n$$

Un index détaillé permet  
de retrouver aisément  
toute notion traitée.

## Index

### A

Abel, 426, 433, 437, 636  
lemme d'—, 472  
notice biographique, 186  
règle d'— pour les intégrales impropres, 289  
règle d'— pour les séries numériques, 185  
théorème du à — et Dini, 228  
théorèmes d'—, 472, 515  
théorèmes dus à —, 185, 197, 289  
transformation d'—, 187

absolue  
convergence — d'une intégrale impropre, 275  
convergence — d'une série de fonctions, 428  
convergence — d'une série numérique, 180

adhérence  
définition, 55  
valeur d'—, 90, 511

adhérent (point —), 55, 59, 61

Alembert (d'), 207, 416  
notice biographique, 164  
règle de — pour les séries entières, 479

origine d'un —, 101  
paramétré du plan, 555  
astéroïde, 562  
asymptote, 567  
horizontale, 567  
oblique, 567  
verticale, 567

### B

Baire, 427  
notice biographique, 426

Banach, 30, 60, 120  
espace de —, 120  
notice biographique, 83  
théorème du à, 82  
théorème du point fixe de —, 124

base  
duale, 591  
orthonormée d'un espace euclidien, 598

Bernoulli (Daniel), 203

Bernoulli (Johann), 178, 203

Bernoulli (lemniscate de —), 570

Bernstein, 310, 401  
lemme de —, 391  
notice biographique, 391  
polynômes de —, 350, 386  
théorème de —, 391

Bertrand, 214, 231  
fonctions de —, 271  
fonctions de — généralisées, 283  
intégrales de —, 272  
intégrales de — généralisées, 283  
notice biographique, 159

728

### LISTE DES NOTICES BIOGRAPHIQUES

Abel	186	Hölder	114
Alembert (d')	164	Jacobi	594
Baire	426	Kantorovich	401
Banach	83	Kronecker	233
Bernstein	391	Kummer	235
Bertrand	159	Lagrange	636
Bessel	669	Lebesgue	442
Bézier	388	Leibniz	178
Cantor	369	Lejeune-Dirichlet	317
Carleman	211	Lionville	528
Cauchy	151	Lipschitz	78
Cesàro	167	Mertens	193
Dedekind	51	Minkowski	116
Dini	231	Pringsheim	227
Du Bois-Reymond	681	Raabe	173
Duhamel	175	Riemann	153
Euler	203	Riesz	600
Fejér	701	Schlömilch	208
Fourier	656	Schwarz	623
Fréchet	96	Seidel	366
Fresnel	326	Tauber	519
Fubini	299	Toeplitz	195
Gauss	207	Tychonoff	99
Gutzmer	526	Von Neumann	29
Hadamard	508	Weierstrass	373
Hausdorff	72	Wirtinger	679
Héine	100	Young	629
Hilbert	121		

Une liste des notices  
biographiques est donnée avant  
l'index.



# *Table des matières*

<b>1</b>	<b>Espaces vectoriels normés</b>	<b>21</b>
1.1	Introduction . . . . .	21
1.2	Définitions . . . . .	24
1.2.1	Espace préhilbertien réel . . . . .	24
1.2.2	Inégalité de Cauchy-Schwarz . . . . .	28
1.2.3	Inégalité de Minkowski . . . . .	30
1.2.4	Normes . . . . .	31
1.2.5	Distance . . . . .	36
1.2.6	Distance associée à une norme . . . . .	37
1.2.7	Distance d'un point à une partie d'un espace vectoriel normé . . . . .	37
1.2.8	Produit d'espaces vectoriels normés . . . . .	38
1.2.9	Convergence d'une suite dans un espace vectoriel normé . . . . .	39
1.3	Topologie dans un espace vectoriel normé . . . . .	41
1.3.1	Boule ouverte, boule fermée, sphère . . . . .	41
1.3.2	Normes équivalentes . . . . .	42
1.3.3	Voisinage . . . . .	47
1.3.4	Ouvert, fermé . . . . .	49
1.3.5	Intérieur, adhérence et frontière . . . . .	55
1.3.6	Point adhérent et limite . . . . .	59
1.3.7	Point adhérent et distance . . . . .	61
1.3.8	Partie dense . . . . .	61
1.4	Limites . . . . .	63

1.4.1	Définitions . . . . .	63
1.4.2	Limites et suites . . . . .	65
1.4.3	Opérations sur les limites . . . . .	66
1.4.4	Limite dans un espace vectoriel normé produit . . . . .	67
1.5	Continuité . . . . .	69
1.5.1	Définition . . . . .	69
1.5.2	Opérations sur les applications continues . . . . .	70
1.5.3	Continuité et suites . . . . .	71
1.5.4	Continuité et topologie . . . . .	71
1.5.5	Continuité et partie dense . . . . .	74
1.6	Continuité uniforme et applications lipschitziennes . . . . .	75
1.6.1	Continuité uniforme . . . . .	75
1.6.2	Applications lipschitziennes . . . . .	77
1.7	Continuité des applications linéaires . . . . .	82
1.7.1	Caractérisation des applications linéaires continues . . . . .	82
1.7.2	Exemples . . . . .	85
1.8	Continuité des applications bilinéaires et multilinéaires . . . . .	86
1.8.1	Caractérisation des applications multilinéaires continues . . . . .	86
1.8.2	Exemples . . . . .	88
1.9	Compacité . . . . .	89
1.9.1	Suite extraite et valeurs d'adhérence . . . . .	89
1.9.2	Partie compacte d'un espace vectoriel normé . . . . .	91
1.9.3	Produit fini de compacts . . . . .	92
1.9.4	Suites de points d'un compact . . . . .	93
1.9.5	Parties compactes de $\mathbb{R}^n$ . . . . .	94
1.9.6	Applications continues sur un compact . . . . .	95
1.9.7	Théorème de Tychonoff . . . . .	98
1.9.8	Théorème de Heine . . . . .	100
1.10	Connexité par arcs . . . . .	101
1.10.1	Définitions . . . . .	101
1.10.2	Parties connexes par arcs de $\mathbb{R}$ . . . . .	104
1.10.3	Partie connexe par arcs et application continue . . . . .	105
1.10.4	Théorème des valeurs intermédiaires . . . . .	106
1.11	Espaces vectoriels normés de dimension finie . . . . .	106

1.11.1	Équivalence des normes . . . . .	106
1.11.2	Continuité des applications linéaires . . . . .	108
1.11.3	Continuité des applications multilinéaires . . . . .	110
1.11.4	Parties compactes d'un espace vectoriel de dimension finie . . . . .	111
1.11.5	Théorème de Bolzano-Weierstrass . . . . .	112
1.12	Compléments . . . . .	113
1.12.1	Inégalités de Hölder et de Minkowski . . . . .	113
1.12.2	Complétude . . . . .	118
1.12.3	Théorème du point fixe . . . . .	124
1.12.4	Théorème de Riesz . . . . .	126
1.13	Exercices corrigés . . . . .	131
<b>2</b>	<b>Séries numériques</b>	<b>139</b>
2.1	Introduction . . . . .	139
2.1.1	Un paradoxe de Zénon . . . . .	139
2.1.2	Le paradoxe des morceaux de sucre . . . . .	140
2.2	Définitions . . . . .	143
2.2.1	Convergence et divergence . . . . .	143
2.2.2	Somme et reste d'une série convergente . . . . .	145
2.2.3	Condition nécessaire de convergence . . . . .	147
2.3	Séries à termes positifs . . . . .	148
2.3.1	Premiers critères . . . . .	148
2.3.2	Lemme de condensation de Cauchy . . . . .	150
2.3.3	Séries de Riemann . . . . .	152
2.3.4	Critères de comparaison . . . . .	154
2.3.5	Règle de Riemann . . . . .	156
2.3.6	Règle de Riemann généralisée . . . . .	157
2.3.7	Séries de Bertrand . . . . .	158
2.3.8	Critère de comparaison logarithmique . . . . .	161
2.3.9	Règle de d'Alembert . . . . .	162
2.3.10	Règle de Cauchy . . . . .	165
2.3.11	Comparaison des règles de Cauchy et de d'Alembert . . . . .	166
2.3.12	Règles de Raabe et Duhamel . . . . .	172
2.4	Séries à termes quelconques . . . . .	176

2.4.1	Séries alternées . . . . .	176
2.4.2	Règle de Leibniz . . . . .	177
2.4.3	Convergence absolue . . . . .	180
2.4.4	Sommation des relations de comparaison . . . . .	182
2.4.5	Règle d'Abel . . . . .	185
2.5	Produit de deux séries numériques . . . . .	188
2.5.1	Théorème dû à Cauchy . . . . .	189
2.5.2	Théorème de Mertens . . . . .	192
2.5.3	Théorème dû à Abel . . . . .	197
2.6	Valeur de la somme de séries . . . . .	199
2.7	Compléments . . . . .	205
2.7.1	Règle de Gauss . . . . .	205
2.7.2	Théorème dû à Schlömilch . . . . .	208
2.7.3	Théorème dû à Carleman . . . . .	211
2.7.4	Généralisation des séries de Bertrand . . . . .	214
2.7.5	Généralisation des règles de Raabe et Duhamel . . . . .	220
2.7.6	Théorème dû à Olivier . . . . .	224
2.7.7	Théorème dû à Pringsheim . . . . .	226
2.7.8	Théorème dû à Abel et Dini . . . . .	228
2.7.9	Théorème dû à Dini . . . . .	230
2.7.10	Théorème dû à Kronecker . . . . .	232
2.7.11	Théorème dû à Kummer et Dini . . . . .	234
2.7.12	Règle de Kummer . . . . .	236
2.8	Exercices corrigés . . . . .	239
<b>3</b>	<b>Intégrales impropres</b> . . . . .	<b>251</b>
3.1	Introduction . . . . .	251
3.2	Définitions . . . . .	254
3.2.1	Définition d'une intégrale impropre . . . . .	254
3.2.2	Convergence et divergence . . . . .	255
3.3	Fonctions de Riemann . . . . .	262
3.4	Intégrales impropres de fonctions positives . . . . .	263
3.4.1	Critères de comparaison pour des fonctions positives . . . . .	265
3.4.2	Critère intégral de Cauchy . . . . .	267

3.5	Critères complémentaires . . . . .	269
3.5.1	Intégration par parties . . . . .	269
3.5.2	Changement de variable . . . . .	270
3.5.3	Intégrales de Bertrand . . . . .	271
3.5.4	Convergence absolue . . . . .	275
3.5.5	Intégration des relations de comparaison . . . . .	278
3.5.6	Généralisation des intégrales de Bertrand . . . . .	283
3.5.7	Comportement asymptotique . . . . .	285
3.5.8	Règle d'Abel . . . . .	289
3.5.9	Théorème dû à Ermakoff . . . . .	291
3.6	Intégrales définies dépendant d'un paramètre . . . . .	293
3.6.1	Continuité . . . . .	294
3.6.2	Dérivabilité : théorème dû à Leibniz . . . . .	295
3.6.3	Intégrabilité : théorème de Fubini . . . . .	297
3.7	Intégrales impropres dépendant d'un paramètre . . . . .	300
3.7.1	Continuité . . . . .	300
3.7.2	Dérivabilité . . . . .	303
3.7.3	Intégrabilité : théorèmes de Fubini . . . . .	306
3.8	Quelques intégrales célèbres . . . . .	311
3.8.1	Intégrales d'Euler . . . . .	311
3.8.2	Intégrales de Lejeune-Dirichlet . . . . .	316
3.8.3	Intégrale de Gauss . . . . .	322
3.8.4	Intégrales de Fresnel . . . . .	325
3.9	Exercices corrigés . . . . .	335
<b>4</b>	<b>Suites de fonctions</b> . . . . .	<b>349</b>
4.1	Introduction . . . . .	349
4.2	Définitions . . . . .	351
4.2.1	Suite de fonctions . . . . .	351
4.2.2	Convergence simple . . . . .	352
4.2.3	Convergence uniforme . . . . .	356
4.3	Propriétés de la convergence uniforme . . . . .	361
4.3.1	La convergence uniforme implique la convergence simple . . . . .	361
4.3.2	Convergence uniforme et opérations . . . . .	362

4.3.3	Convergence uniforme et continuité . . . . .	365
4.3.4	Convergence uniforme et limite . . . . .	368
4.3.5	Convergence uniforme et intégrales définies . . . . .	371
4.3.6	Convergence uniforme et dérivées . . . . .	372
4.3.7	Convergence uniforme et intégrales impropres . . . . .	377
4.3.8	Théorèmes de Dini . . . . .	381
4.4	Approximation des fonctions continues . . . . .	386
4.4.1	Polynômes de Bernstein . . . . .	386
4.4.2	Courbes de Bézier . . . . .	387
4.4.3	Approximation uniforme des fonctions continues . . . . .	389
4.4.4	Approximation uniforme des fonctions continues et périodiques . .	394
4.4.5	Un raffinement du théorème de Weierstrass . . . . .	400
4.5	Exercices corrigés . . . . .	404
<b>5</b>	<b>Séries de fonctions</b>	<b>415</b>
5.1	Introduction . . . . .	415
5.1.1	Décomposition d'un signal en série de Fourier . . . . .	415
5.1.2	Vibrations d'une corde . . . . .	416
5.2	Convergences . . . . .	420
5.2.1	Définition d'une série de fonctions . . . . .	420
5.2.2	Convergence simple . . . . .	421
5.2.3	Convergence uniforme . . . . .	422
5.2.4	Convergence normale . . . . .	427
5.2.5	Convergence absolue . . . . .	428
5.2.6	Liens entre les différents types de convergence . . . . .	429
5.3	Propriétés de la convergence uniforme . . . . .	432
5.3.1	Convergence uniforme et continuité . . . . .	432
5.3.2	Convergence uniforme et limite . . . . .	434
5.3.3	Convergence uniforme et intégrales définies . . . . .	435
5.3.4	Convergence uniforme et dérivées . . . . .	436
5.4	Théorème de convergence dominée de Lebesgue . . . . .	437
5.4.1	Théorème d'intégration terme à terme . . . . .	437
5.4.2	Théorème de convergence dominée . . . . .	440
5.5	Une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable nulle part . . . . .	446

5.6	Exercices corrigés . . . . .	450
<b>6</b>	<b>Séries entières</b>	<b>467</b>
6.1	Introduction . . . . .	467
6.2	Rayon de convergence . . . . .	469
6.2.1	Convergence d'une suite ou d'une série complexe . . . . .	469
6.2.2	Définition d'une série entière . . . . .	471
6.2.3	Lemme d'Abel . . . . .	472
6.2.4	Définition du rayon de convergence . . . . .	473
6.2.5	Disque ouvert de convergence . . . . .	475
6.2.6	Règles de d'Alembert et de Cauchy . . . . .	479
6.3	Opérations sur les séries entières . . . . .	482
6.3.1	Somme . . . . .	482
6.3.2	Produit par un scalaire . . . . .	483
6.3.3	Produit de Cauchy . . . . .	484
6.3.4	Théorème de comparaison . . . . .	486
6.3.5	Dérivée et primitive d'une série entière . . . . .	487
6.4	Propriétés de la fonction somme d'une série entière . . . . .	488
6.4.1	Convergence normale de la série entière . . . . .	489
6.4.2	Continuité de la fonction somme . . . . .	489
6.4.3	Primitive de la fonction somme . . . . .	490
6.4.4	Dérivée de la fonction somme . . . . .	491
6.4.5	Dérivées successives de la fonction somme . . . . .	492
6.5	Fonctions développables en série entière . . . . .	493
6.5.1	Définition . . . . .	493
6.5.2	Condition nécessaire . . . . .	494
6.5.3	Condition nécessaire et suffisante . . . . .	496
6.5.4	Condition suffisante . . . . .	498
6.5.5	Développement en série entière des fonctions usuelles . . . . .	499
6.6	Séries entières et équations différentielles . . . . .	502
6.7	Fonction exponentielle complexe . . . . .	504
6.8	Compléments . . . . .	507
6.8.1	Produit de Hadamard . . . . .	507
6.8.2	Théorème de Hadamard . . . . .	510

6.8.3	Théorème d'Abel . . . . .	515
6.8.4	Théorème de Tauber . . . . .	518
6.8.5	Théorème de Cauchy . . . . .	521
6.8.6	Théorème de d'Alembert-Gauss . . . . .	522
6.8.7	Théorème dû à Gutzmer . . . . .	525
6.8.8	Théorème de Liouville . . . . .	527
6.9	Exercices corrigés . . . . .	529
<b>7</b>	<b>Calcul différentiel</b>	<b>539</b>
7.1	Introduction . . . . .	539
7.2	Fonctions vectorielles . . . . .	544
7.2.1	Généralités . . . . .	544
7.2.2	Intégrale d'une fonction vectorielle sur un segment . . . . .	547
7.2.3	Inégalité triangulaire . . . . .	549
7.2.4	Inégalité des accroissements finis . . . . .	551
7.2.5	Théorème de Taylor-Young . . . . .	554
7.3	Arcs paramétrés du plan . . . . .	555
7.3.1	Définitions . . . . .	555
7.3.2	Tangente . . . . .	558
7.3.3	Étude locale . . . . .	559
7.3.4	Branches infinies . . . . .	566
7.3.5	Un exemple d'étude d'un arc . . . . .	570
7.4	Différentielle . . . . .	572
7.4.1	Application différentiable . . . . .	572
7.4.2	Différentielle d'une application linéaire . . . . .	577
7.4.3	Différentielle d'une application bilinéaire . . . . .	577
7.4.4	Propriétés des applications différentiables . . . . .	578
7.4.5	Dérivée le long d'un arc . . . . .	581
7.5	Dérivées partielles . . . . .	583
7.5.1	Dérivée directionnelle . . . . .	583
7.5.2	Dérivées partielles dans une base . . . . .	585
7.5.3	Lien entre différentielle et dérivées partielles . . . . .	587
7.5.4	Notation de la différentielle d'une application à valeurs réelles . . . . .	590
7.5.5	Matrice jacobienne et jacobien . . . . .	593



7.5.6	Composition des dérivées partielles . . . . .	596
7.6	Gradient . . . . .	598
7.6.1	Base orthonormée d'un espace euclidien . . . . .	598
7.6.2	Théorème de Riesz . . . . .	599
7.6.3	Définition du gradient . . . . .	601
7.6.4	Propriétés du gradient . . . . .	603
7.6.5	Point critique et extremum . . . . .	608
7.7	Applications de classe $C^1$ . . . . .	611
7.7.1	Condition nécessaire et suffisante . . . . .	611
7.7.2	Opérations sur les applications de classe $C^1$ . . . . .	613
7.7.3	Théorème des accroissements finis . . . . .	615
7.7.4	Inégalité des accroissements finis . . . . .	618
7.7.5	Caractérisation des fonctions constantes . . . . .	618
7.8	Applications de classe $C^k$ pour $k \geq 2$ . . . . .	619
7.8.1	Dérivées partielles d'ordre $k \geq 2$ . . . . .	619
7.8.2	Théorème de Schwarz . . . . .	621
7.9	Extrema locaux d'une fonction de deux variables réelles . . . . .	627
7.9.1	Théorème de Taylor-Young . . . . .	627
7.9.2	Théorème dû à Lagrange . . . . .	631
7.9.3	Exemples . . . . .	635
7.10	Exercices corrigés . . . . .	639
<b>A</b>	<b>Séries de Fourier</b> . . . . .	<b>651</b>
A.1	Définitions . . . . .	651
A.1.1	Série trigonométrique . . . . .	651
A.1.2	Continuité par morceaux . . . . .	652
A.1.3	Coefficients de Fourier et série de Fourier . . . . .	655
A.1.4	L'espace $\mathcal{D}$ et ses propriétés . . . . .	664
A.2	Propriétés . . . . .	667
A.2.1	Inégalité de Bessel . . . . .	667
A.2.2	Lemme de Riemann . . . . .	670
A.3	Théorèmes de convergence . . . . .	673
A.3.1	Convergence en moyenne quadratique et théorème de Parseval . . . . .	674
A.3.2	Une application du théorème de Parseval . . . . .	679

---

A.3.3	Théorème dû à du Bois-Reymond . . . . .	680
A.3.4	Convergence simple : théorème de Lejeune-Dirichlet . . . . .	685
A.3.5	Convergence normale . . . . .	698
A.3.6	Convergence en moyenne de Cesàro : deux théorèmes de Fejér . . .	699
A.4	Exercices corrigés . . . . .	707
<b>Liste des notices biographiques</b>		<b>728</b>
<b>Index</b>		<b>729</b>

## CHAPITRE 1

# *Espaces vectoriels normés*

Dans tout ce chapitre  $\mathbb{K}$  désigne  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

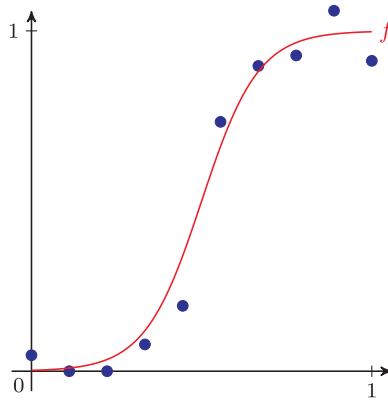
### **1.1** Introduction

Dans un espace vectoriel  $E$ , il peut être utile de quantifier l'écart entre deux vecteurs  $u$  et  $v$ . Cet écart se mesure naturellement dans  $\mathbb{R}^2$  ou  $\mathbb{R}^3$  par la norme euclidienne de la différence  $u - v$ . Cette norme euclidienne se généralise aisément dans  $\mathbb{R}^p$  pour tout entier  $p$ . Mais il est souvent nécessaire de mesurer la distance entre deux vecteurs d'un espace vectoriel *quelconque*.

En particulier, si  $E$  est l'espace des fonctions continues d'un segment  $[a, b]$  vers  $\mathbb{R}$  et si  $f$  appartient à  $E$ , on peut avoir besoin d'approcher  $f$  par une autre fonction  $g$  et d'évaluer la qualité de cette approximation.

Supposons par exemple que l'on cherche à étalonner un anémomètre. Cet instrument est constitué d'une hélice qui tourne sous la force du vent. Si elle est couplée à une dynamo, l'hélice en rotation crée un courant électrique dont la mesure indique la vitesse du vent. Encore faut-il connaître la relation entre ces deux variables. On suppose donc qu'il existe une fonction  $y = f(x)$  où  $x$  désigne la vitesse du vent et  $y$  l'intensité électrique mesurée, mais que cette fonction est inconnue. L'étalonnage de l'instrument consiste alors à utiliser un ensemble de mesures  $\{(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)\}$  de ces deux variables pour construire une

estimation  $g$  de la fonction  $f$ . Si cette approximation est de bonne qualité, toute nouvelle mesure  $y$  de l'intensité électrique peut être traduite en une mesure  $x$  de la vitesse du vent par inversion de  $g$ .



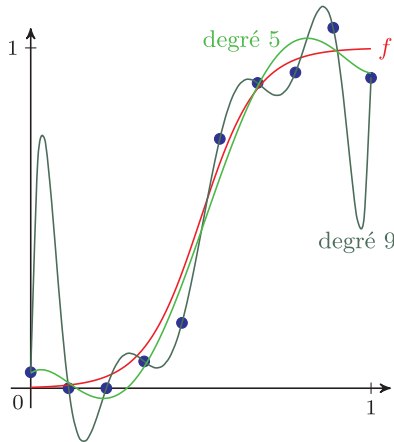
La figure ci-dessus montre le graphe de cette vraie fonction  $f$  (inconnue) ainsi qu'un ensemble de dix points  $\{(x_1, y_1), \dots, (x_{10}, y_{10})\}$  servant à l'étalonnage. Comme souvent dans la vie expérimentale, ces points sont sujets à des bruits de mesures, c'est-à-dire qu'ils ne se situent pas exactement sur le graphe de la fonction  $f$ . Si on n'a pas d'idée pré-établie de la forme analytique de la vraie fonction  $f$ , on peut vouloir l'approcher par un polynôme : on en fixe le degré (par exemple 2) ; l'estimation  $g$  a donc la forme

$$g(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$$

et, pour une valeur donnée des coefficients  $(a_0, a_1, a_2)$ , on définit la fonction  $E$  d'erreur du modèle en  $(a_0, a_1, a_2)$  sur les points d'étalonnage par

$$\begin{aligned} E(a_0, a_1, a_2) &= \sum_{k=1}^n (g(x_k) - y_k)^2 \\ &= \sum_{k=1}^n (a_0 + a_1x_k + a_2x_k^2 - y_k)^2 \end{aligned}$$

On peut alors obtenir une estimation de  $f$  en donnant aux coefficients la valeur  $(a_0^*, a_1^*, a_2^*)$  qui minimise la fonction  $E$ .



La figure ci-dessus montre les estimations obtenues en choisissant des polynômes de degrés 5 et 9. Elle conduit à deux observations :

- L'estimation par un polynôme de degré 9 a une meilleure performance vis-à-vis des points d'étalonnage, puisqu'elle passe exactement par ceux-ci.
- Néanmoins, l'estimation par un polynôme de degré 5 est de meilleure qualité vis-à-vis de la fonction  $f$  : à l'œil nu, son graphe est en effet plus proche de celui de  $f$  sur l'ensemble du domaine.

Cet exemple fait apparaître la nécessité de quantifier l'écart global entre deux fonctions  $f$  et  $g$  : le polynôme doit être choisi ici, non en fonction de la qualité de l'estimation sur les  $n$  exemples, mais sur tout le domaine de définition.

Cette quantification de l'écart entre deux fonctions peut être réalisée par des normes.

Une norme sur un espace vectoriel  $E$  est une application  $\|\cdot\| : \begin{cases} E & \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ u & \mapsto \|u\| \end{cases}$

possédant de bonnes propriétés, comme d'être toujours positive et de ne s'annuler que quand  $u = 0$ . Ces propriétés, qui doivent être vérifiées par toute norme, ont été choisies de façon à pouvoir envisager  $\|u - v\|$  comme une distance entre deux vecteurs  $u$  et  $v$ .

Ainsi, quand  $E$  est l'espace vectoriel des fonctions continues de  $[0, 1]$  vers  $\mathbb{R}$ , les normes

$$\text{les plus communes sont } \begin{cases} \|f - g\|_1 = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx \\ \|f - g\|_2 = \sqrt{\int_0^1 (f(x) - g(x))^2 dx} \\ \|f - g\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)| \end{cases}$$

Toutes permettent de définir un écart global entre deux fonctions  $f$  et  $g$ .

Dans le cas de l'étalonnage de l'anémomètre vu plus haut, on ne sait pas évaluer  $\|f - g\|_\infty$  à partir d'un ensemble fini de  $n$  points : cette norme ne dépend que d'une seule valeur de  $|f - g|$ , celle prise au point  $x^*$  en lequel  $|f - g|$  est maximale ; si  $x^*$  ne fait pas partie des points d'étalonnage  $x_i$ , les  $|y_i - g(x_i)|$  ne suffisent pas à évaluer avec précision  $|f(x^*) - g(x^*)|$ .

En revanche, les normes  $\|f - g\|_1$  et  $\|f - g\|_2$  sont basées, non pas sur une valeur *unique* mais sur des *moyennes* de  $|f(x) - g(x)|$  et  $(f(x) - g(x))^2$ .

Ainsi les statisticiens peuvent estimer ces normes à partir d'un ensemble fini de  $n$  points d'étalonnage, avec d'autant plus de précision que le nombre  $n$  est grand. Cela permet de construire une estimation polynomiale  $g_n$  de  $f$  à partir de  $n$  points d'étalonnage : on choisit pour  $g_n$  le polynôme qui minimise l'estimation à  $n$  points de  $\|f - g\|_2$ . De plus, cette procédure garantit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|g_n - f\|_2 = 0$$

## 1.2 Définitions

### 1.2.1 Espace préhilbertien réel

Cette section a pour but de rappeler succinctement quelques définitions et résultats sur les espaces préhilbertiens réels<sup>1</sup>.

#### Définition 1

Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. On appelle *forme bilinéaire* sur  $E$  toute application  $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$  telle que

- pour tout  $x \in E$ , l'application  $y \mapsto \varphi(x, y)$  est linéaire ;
- pour tout  $y \in E$ , l'application  $x \mapsto \varphi(x, y)$  est linéaire.

1. Pour plus de détails, cf. Antonini, *Algèbre 2<sup>e</sup> année*, De Boeck (2014).

**Remarque**

Si  $\varphi$  est une forme bilinéaire sur  $E$ , on a donc, pour tout  $(x, y, z, t) \in E^4$  et tout  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ ,

$$\varphi(x + \lambda y, z + \mu t) = \varphi(x, z) + \mu\varphi(x, t) + \lambda\varphi(y, z) + \lambda\mu\varphi(y, t)$$

**Exemples**

1. Soient  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $E = \mathbb{R}^n$  et  $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$  définie pour tout  $x = (x_1, \dots, x_n)$  et  $y = (y_1, \dots, y_n)$  dans  $E$  par

$$\varphi(x, y) = \sum_{k=1}^n x_k y_k$$

Alors  $\varphi$  est une forme bilinéaire sur  $E$ .

En effet, soient  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $y = (y_1, \dots, y_n)$ ,  $z = (z_1, \dots, z_n)$  trois vecteurs de  $\mathbb{R}^n$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} \text{Alors } \varphi(x, y + \lambda z) &= \sum_{k=1}^n x_k (y_k + \lambda z_k) = \sum_{k=1}^n x_k y_k + \lambda x_k z_k \\ &= \sum_{k=1}^n x_k y_k + \lambda \sum_{k=1}^n x_k z_k \\ &= \varphi(x, y) + \lambda \varphi(x, z) \end{aligned}$$

De même  $\varphi(x + \lambda y, z) = \varphi(x, z) + \lambda \varphi(y, z)$ .

2. Soient  $E$  l'ensemble des fonctions continues de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  et  $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$  définie pour tout  $(f, g) \in E^2$  par

$$\varphi(f, g) = \int_0^1 f(t)g(t) dt$$

Alors  $\varphi$  est une forme bilinéaire sur  $E$ .

En effet, soient  $(f, g, h) \in E^3$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} \text{Alors } \varphi(f, g + \lambda h) &= \int_0^1 f(t)(g + \lambda h)(t) dt = \int_0^1 f(t)g(t) + \lambda f(t)h(t) dt \\ &= \int_0^1 f(t)g(t) dt + \lambda \int_0^1 f(t)h(t) dt \end{aligned}$$

Donc  $\varphi(f, g + \lambda h) = \varphi(f, g) + \lambda\varphi(f, h)$ .

De même  $\varphi(f + \lambda g, h) = \varphi(f, h) + \lambda\varphi(g, h)$ .

3. Soient  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  l'espace des matrices carrées d'ordre  $n$  à coefficients réels et  $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$  définie pour tout  $(A, B) \in E^2$  par

$$\varphi(A, B) = \text{tr}(A^T B)$$

où  $A^T$  est la transposée de la matrice  $A$ .

Alors  $\varphi$  est une forme bilinéaire sur  $E$ .

En effet, soient  $(A, B, C) \in E^3$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} \text{Alors } \varphi(A, B + \lambda C) &= \text{tr}(A^T(B + \lambda C)) = \text{tr}(A^T B + \lambda A^T C) \\ &= \text{tr}(A^T B) + \lambda \text{tr}(A^T C) \\ &= \varphi(A, B) + \lambda\varphi(A, C) \end{aligned}$$

De même  $\varphi(A + \lambda B, C) = \varphi(A, C) + \lambda\varphi(B, C)$ .

### Définition 2

Soient  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et  $\varphi$  une forme bilinéaire sur  $E$ . On dit que  $\varphi$  est *symétrique* si pour tout  $(x, y) \in E^2$ ,  $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$ .

### Exemples

En reprenant les deux premiers exemples précédents,  $\varphi$  est bien entendu symétrique.

Quant au troisième exemple,  $\varphi$  est également symétrique car pour tout  $(A, B) \in E^2$ ,  $\varphi(A, B) = \text{tr}(A^T B) = \text{tr}((A^T B)^T) = \text{tr}(B^T A) = \varphi(B, A)$ .

### Définition 3

Soient  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et  $\varphi$  une forme bilinéaire symétrique sur  $E$ . On dit que  $\varphi$  est un *produit scalaire* sur  $E$  si  $\varphi$  est de plus positive et définie c'est-à-dire si

- pour tout  $x \in E$ ,  $\varphi(x, x) \geq 0$ ;
- pour tout  $x \in E$ ,  $\varphi(x, x) = 0 \implies x = 0$ .



**Remarque**

Si  $\varphi$  est une forme bilinéaire sur  $E$ , on a toujours  $\varphi(0, 0) = 0$  car pour tout  $x \in E$ ,  $\varphi(0, 0) = \varphi(0x, 0) = 0 \varphi(x, 0) = 0$ .

**Exemples**

1. Reprenons le premier exemple p. 25. On a déjà vu que  $\varphi$  est une forme bilinéaire symétrique. Montrons qu'elle est positive et définie.

Soit  $x = (x_1, \dots, x_n) \in E$ . Alors  $\varphi(x, x) = \sum_{k=1}^n x_k^2 \geq 0$  donc  $\varphi$  est positive.

De plus si  $\varphi(x, x) = 0$  alors pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $x_k^2 = 0$  donc  $x = 0$  et  $\varphi$  est donc définie d'où  $\varphi$  est un produit scalaire sur  $E$ .

2. Reprenons le deuxième exemple p. 25. On a déjà vu que  $\varphi$  est une forme bilinéaire symétrique. Montrons qu'elle est positive et définie.

Soit  $f \in E$ .

Alors, comme  $f^2$  est positive sur  $[0, 1]$ ,  $\varphi(f, f) = \int_0^1 f^2(t) dt \geq 0$ . Donc  $\varphi$  est positive.

De plus si  $\varphi(f, f) = 0$  alors, comme  $f^2$  est positive sur  $[0, 1]$ , pour tout  $t \in [0, 1]$ ,  $f^2(t) = 0$  donc  $f = 0$ . Ainsi  $\varphi$  est définie et est donc un produit scalaire sur  $E$ .

3. Reprenons le troisième exemple p. 26. On a déjà vu que  $\varphi$  est une forme bilinéaire symétrique. Montrons qu'elle est positive et définie.

Soit  $A = (a_{ij}) \in E$ .

Montrons que  $\varphi(A, A) = \text{tr}(A^T A) \geq 0$ .

$A^T A = (b_{ij})$  où pour tout  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ ,  $b_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ki} a_{kj}$ .

Donc  $\varphi(A, A) = \text{tr}(A^T A) = \sum_{i=1}^n b_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ki}^2 \geq 0$  et  $\varphi$  est donc positive.

Supposons à présent  $\varphi(A, A) = 0$ . Alors pour tout  $(i, k) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ ,  $a_{ki}^2 = 0$  donc  $A = 0$  et  $\varphi$  est donc définie.

**Définition 4**

On appelle *espace préhilbertien réel*<sup>2</sup> tout  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel muni d'un produit scalaire. On appelle *espace euclidien* tout  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire.

## Remarque

Lorsque  $(E, \varphi)$  est un espace préhilbertien réel, on notera souvent  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  à la place de  $\varphi$ .

## 1.2.2 Inégalité de Cauchy-Schwarz

**Théorème 1 (inégalité de Cauchy<sup>3</sup>-Schwarz<sup>4</sup> (1927)<sup>5</sup>)**

Soient  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et  $\varphi$  une forme bilinéaire symétrique positive<sup>6</sup> sur  $E$ .

Alors pour tout  $(x, y) \in E^2$ , on a<sup>7</sup>

$$|\varphi(x, y)| \leq \sqrt{\varphi(x, x)} \sqrt{\varphi(y, y)}$$

## Démonstration

Soit  $(x, y) \in E^2$ . Comme  $\varphi$  est positive, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\varphi(x + ty, x + ty) \geq 0$ .

Or, comme  $\varphi$  est bilinéaire symétrique,

$$\varphi(x + ty, x + ty) = \varphi(y, y)t^2 + 2t\varphi(x, y) + \varphi(x, x)$$

Comme, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , ce trinôme du second degré en  $t$  est positif, son discriminant  $\Delta$  est négatif ou nul<sup>8</sup>. Or

$$\Delta = 4(\varphi(x, y))^2 - 4\varphi(x, x)\varphi(y, y)$$

donc  $\Delta \leq 0$  implique bien l'inégalité souhaitée.

2. en hommage à David Hilbert. Cf. également la définition d'un espace de Hilbert p. 120 et notice biographique p. 121.

3. cf. notice biographique p. 151.

4. cf. notice biographique p. 623.

5. Ce théorème, connu sous le nom d'*inégalité de Cauchy-Schwarz* ou parfois d'*inégalité de Bouniakowsky*, a été démontré dans des cas particuliers par trois mathématiciens : Cauchy démontre cette inégalité pour des familles de réels en 1821 (cf. *Cours d'analyse de l'École royale polytechnique*, Debure, Paris, p. 454), Bouniakowsky la démontre pour les intégrales en 1859 (cf. p. 4 dans *Sur quelques inégalités concernant les intégrales ordinaires et les intégrales aux différences finies*, Mémoires de l'Académie Impériale des sciences de St-Petersbourg (VII), 1, n°9, pp. 1-18) et Schwarz pour les intégrales doubles en 1885, mais publié seulement en 1888 (cf. p. 344 dans *Ueber ein die Flächen kleinsten Flächeninhalts betreffendes Problem der Variationsrechnung*, Acta Societatis scientiarum Fennicae, 15, pp. 315-362). Il n'est démontré dans le cas général qu'en 1927 par von Neumann (cf. pp. 16-17 dans *Mathematische Begründung der Quantenmechanik*, Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse, pp. 1-57).

6. Le théorème est évidemment vérifié si  $\varphi$  est un produit scalaire.

7. cf. également la remarque p. 35.

8. Si  $\varphi(y, y) = 0$ , pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $2t\varphi(x, y) + \varphi(x, x) \geq 0$  donc  $\varphi(x, y) = 0$  et l'inégalité du théorème est bien vérifiée.



**John von Neumann**  
(1903–1957)

Né Neumann (János Lajos<sup>a</sup>) à Budapest, il ne devient von Neumann qu'en 1913 lorsque son père achète un titre nobiliaire<sup>b</sup>. C'est un enfant prodige doté d'une mémoire exceptionnelle. Il publie son premier article en 1922<sup>c</sup>. Ses capacités prodigieuses lui permettent l'obtention d'excellents résultats en mathématiques à l'université de Budapest, sans avoir assisté au moindre cours. À peine âgé de vingt ans, il se fait remarquer en publiant un article sur la théorie des nombres, dans lequel il améliore la définition de Cantor<sup>d</sup> d'un nombre ordinal<sup>e</sup>. Il soutient sa thèse<sup>f</sup> à l'université de Budapest en 1926 : elle traite de l'axiomatisation de la théorie des ensembles, sujet sur lequel il publie, dès l'âge de 22 ans, des articles d'une incroyable densité<sup>g</sup>. À partir de 1927, il excelle à nouveau dans l'axiomatisation de la mécanique quantique, sujet réputé pourtant très difficile : il est l'homme qui parvient à introduire les fondements mathématiques de cette théorie<sup>h</sup>. Considéré par ses pairs comme un authentique génie, il obtient également des résultats scientifiques remarquables dans des disciplines très diversifiées comme la théorie des jeux<sup>i</sup> et les automates cellulaires<sup>j</sup>. Il peut être, à juste titre, considéré comme un pionnier dans la description des composants d'un ordinateur<sup>k</sup>.

a. En Hongrie, une personne est nommée systématiquement dans l'ordre du nom puis des prénoms.

b. Il germanise alors son prénom en Johann puis le modifie en John lorsqu'il émigre aux États-Unis.

c. cf. *Über die Lage der Nullstellen gewisser Minimumpolynome* (avec M. Fekete), Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, **31**, pp. 125-130.

d. cf. notice biographique p. 369.

e. cf. *Zur Einführung der transfiniten Zahlen*, Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged), **1**, pp. 199-208 (1923).

f. cf. *Az általános halmazelmélet axiomatikus felépítése* [La structure axiomatique de la théorie générale des ensembles] reprise et complétée dans l'article, *Die Axiomatisierung der Mengenlehre*, Mathematische Zeitschrift, **27**, pp. 669-752 (1928).

g. cf. *Eine Axiomatisierung der Mengenlehre*, Journal de Crelle, **154**, pp. 219-240 (1925).

h. cf. son ouvrage résumant ses cinq années de recherche, *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*, Springer, Berlin (1932).

i. cf. *Zur Theorie der Gesellschaftsspiele*, Mathematische Annalen, **100**, pp. 295-320 (1928).

j. cf. son ouvrage posthume *Theory of Self-Reproducing Automata*, Burks, Urbana-London (1966).

k. cf. *First Draft of a Report on the EDVAC*, Moore School of Electrical Engineering, University of Pennsylvania (1945).

## Exemples

1. Appliquons l'inégalité de Cauchy-Schwarz au premier exemple p. 25.

On a alors pour tout  $x = (x_1, \dots, x_n)$  et  $y = (y_1, \dots, y_n)$  dans  $\mathbb{R}^n$ ,

$$\left( \sum_{k=1}^n x_k y_k \right)^2 \leq \left( \sum_{k=1}^n x_k^2 \right) \left( \sum_{k=1}^n y_k^2 \right)$$

2. Appliquons l'inégalité de Cauchy-Schwarz au deuxième exemple p. 25. On a alors, pour tout  $f$  et  $g$  dans  $C^0([0, 1], \mathbb{R})$ ,

$$\left( \int_0^1 f(t)g(t) dt \right)^2 \leq \left( \int_0^1 f^2(t) dt \right) \left( \int_0^1 g^2(t) dt \right)$$

3. Appliquons cette inégalité au troisième exemple p. 26. On a alors, pour tout  $A$  et  $B$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,

$$\text{tr}^2(A^T B) \leq \text{tr}(A^T A) \text{tr}(B^T B)$$

### 1.2.3 Inégalité de Minkowski

#### **Théorème 2 (inégalité de Minkowski<sup>9</sup> (1927)<sup>10</sup>)**

Soient  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et  $\varphi$  une forme bilinéaire symétrique positive<sup>11</sup> sur  $E$ .

Alors pour tout  $(x, y) \in E^2$ , on a<sup>12</sup>

$$\sqrt{\varphi(x+y, x+y)} \leq \sqrt{\varphi(x, x)} + \sqrt{\varphi(y, y)}$$

#### Démonstration

Soit  $(x, y) \in E^2$ . Alors l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} \text{Alors } \varphi(x+y, x+y) &= \varphi(x, x) + 2\varphi(x, y) + \varphi(y, y) \\ &\leq \varphi(x, x) + 2|\varphi(x, y)| + \varphi(y, y) \\ &\leq \varphi(x, x) + 2\sqrt{\varphi(x, x)}\sqrt{\varphi(y, y)} + \varphi(y, y) \\ &\leq \left( \sqrt{\varphi(x, x)} + \sqrt{\varphi(y, y)} \right)^2 \end{aligned}$$

d'où l'inégalité de Minkowski.

9. Ce théorème a été démontré dans un cas particulier par Minkowski (cf. p. 115 dans *Geometrie der Zahlen*, Teubner, Leipzig).

10. Ce théorème, connu sous le nom d'*inégalité de Minkowski*, n'est en réalité démontré dans le cas général qu'en 1927 par von Neumann (cf. pp. 16-17 dans *Mathematische Begründung der Quantenmechanik*, Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse, pp. 1-57).

11. Le théorème est évidemment vérifié si  $\varphi$  est un produit scalaire.

12. cf. également la remarque p. 35.

## 1.2.4 Normes

## Définition 5

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

On appelle *norme*<sup>13</sup> sur  $E$  toute application  $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}_+$  telle que pour tout  $(x, y) \in E^2$  et tout  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,

- $\|x\| = 0 \implies x = 0$  (séparation)
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$  (homogénéité)
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  (inégalité triangulaire)

On appelle *espace vectoriel normé* (sur  $\mathbb{K}$ )<sup>14</sup> tout couple  $(E, \|\cdot\|)$  où  $E$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $\|\cdot\|$  une norme sur  $E$ .

## Remarque

Si  $\|\cdot\|$  est une norme sur  $E$ , on a immédiatement en prenant  $\lambda = 0$ ,  $\|0\| = 0$ .

## Exemples

1. La fonction valeur absolue  $|\cdot|$  est une norme sur  $\mathbb{R}$ .
2. Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $E = \mathbb{R}^n$ . Notons  $\|\cdot\|_1$ ,  $\|\cdot\|_2$  et  $\|\cdot\|_\infty$  les applications de  $E$  dans  $\mathbb{R}_+$  définies pour tout  $x = (x_1, \dots, x_n) \in E$  par

$$\begin{aligned} \bullet \quad \|x\|_1 &= \sum_{k=1}^n |x_k| \\ \bullet \quad \|x\|_2 &= \left( \sum_{k=1}^n x_k^2 \right)^{1/2} \end{aligned}$$

13. La notion générale de norme dans un espace vectoriel quelconque est introduite en 1920 par Banach (cf. notice biographique p. 83) p. 135 de sa thèse publiée en 1922 (cf. *Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales*, Fundamenta Mathematicae, **3**, pp. 133-181). Trois autres mathématiciens introduisent également cette définition de la norme entre 1920 et 1922 : Norbert Wiener en 1920 (cf. *On the theory of sets of points in terms of continuous transformations*, pp 312-315 de l'ouvrage publié en 1921 : Comptes rendus du Congrès international des mathématiciens [Strasbourg, 22-30 septembre 1920], Privat, Toulouse), Eduard Helly en 1921 (cf. *Über Systeme linearer Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten*, Monatshefte für Mathematik und Physik, **31**, pp. 60-91) et Hans Hahn en 1922 (cf. *Über Folgen linearer Operationen*, Monatshefte für Mathematik und Physik, **32**, pp. 3-88). Wiener dit lui-même en 1923 (cf. p. 143 de sa *Note on a paper of M. Banach*, Fundamenta Mathematicae, **4**, pp. 136-143) que la paternité de cette notion est à remettre à Banach car la thèse de ce dernier est soutenue quelques mois avant ses travaux. Le terme et la définition axiomatique d'une norme avaient déjà été présentés en 1918 par Riesz (cf. notice biographique p. 600) dans le cas particulier de l'espace des fonctions continues sur  $[a, b]$  (cf. p. 72 dans *Über lineare Funktionalgleichungen*, Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged), **41**, pp. 71-98).

14. Sans précision, un espace vectoriel normé est un espace vectoriel normé sur  $\mathbb{K}$ .

- $\|x\|_\infty = \text{Max}_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket} |x_k|$

Alors  $\|\cdot\|_1$ ,  $\|\cdot\|_2$  et  $\|\cdot\|_\infty$  sont trois normes <sup>15</sup> sur  $E$ .

En effet, pour chacune des applications, les propriétés de séparation et d'homogénéité sont évidentes. Montrons simplement l'inégalité triangulaire.

Soit  $(x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n)) \in E^2$ .

- $\|x + y\|_1 = \sum_{k=1}^n |x_k + y_k| \leq \sum_{k=1}^n (|x_k| + |y_k|)$  donc  $\|x + y\|_1 \leq \|x\|_1 + \|y\|_1$ .

- Remarquons que <sup>16</sup>  $\|x\|_2^2 = \langle x|x \rangle$  où le produit scalaire  $\langle | \rangle$  est défini par

$$\langle x|y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k y_k$$

Ainsi, via l'inégalité de Minkowski p. 30, on a

$$\sqrt{\langle x + y|x + y \rangle} \leq \sqrt{\langle x|x \rangle} + \sqrt{\langle y|y \rangle}$$

c'est-à-dire  $\|x + y\|_2 \leq \|x\|_2 + \|y\|_2$ .

- Pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $|x_k + y_k| \leq |x_k| + |y_k| \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$ .

Donc  $\|x + y\|_\infty = \text{Max}_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket} |x_k + y_k| \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$ .

3. Soient  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $a < b$  et  $E = C^0([a, b], \mathbb{R})$  l'espace des fonctions continues sur  $[a, b]$ . Notons  $\|\cdot\|_1$ ,  $\|\cdot\|_2$  et  $\|\cdot\|_\infty$  les applications de  $E$  dans  $\mathbb{R}_+$  définies pour tout  $f \in E$  par

- $\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)| dt$

- $\|f\|_2 = \left( \int_a^b f^2(t) dt \right)^{1/2}$

- $\|f\|_\infty = \text{Sup}_{t \in [a, b]} |f(t)|$

---

15. Plus généralement, on peut montrer que pour tout réel  $p$  supérieur ou égal à 1, les applications  $\|\cdot\|_p : x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto \left( \sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{1/p}$  sont des normes sur  $E$  (cf. corollaire 3 p. 117).

16. d'où la dénomination de *norme euclidienne* pour  $\|\cdot\|_2$ .

Alors  $\|\cdot\|_1$ ,  $\|\cdot\|_2$  et  $\|\cdot\|_\infty$  sont trois normes<sup>17</sup> sur  $E$  appelées respectivement norme de la *convergence en moyenne*, de la *convergence en moyenne quadratique* et norme de la *convergence uniforme*. En effet, pour chacune des applications, les propriétés de séparation et d'homogénéité sont évidentes. Montrons simplement l'inégalité triangulaire.

Soit  $(f, g) \in E^2$ .

$$\bullet \quad \|f + g\|_1 = \int_a^b |f(t) + g(t)| dt \leq \int_a^b (|f(t)| + |g(t)|) dt \leq \|f\|_1 + \|g\|_1.$$

• Remarquons que  $\|f\|_2^2 = \langle f|f \rangle$  où le produit scalaire  $\langle | \rangle$  est défini par

$$\langle f|g \rangle = \int_a^b f(t)g(t) dt$$

Ainsi, via l'inégalité de Minkowski p. 30, on a

$$\sqrt{\langle f + g|f + g \rangle} \leq \sqrt{\langle f|f \rangle} + \sqrt{\langle g|g \rangle}$$

c'est-à-dire  $\|f + g\|_2 \leq \|f\|_2 + \|g\|_2$ .

• Pour tout  $t \in [a, b]$ ,  $|f(t) + g(t)| \leq |f(t)| + |g(t)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ .

Donc  $\|f + g\|_\infty = \sup_{t \in [a, b]} |f(t) + g(t)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ .

4. Soit  $E = \ell^1(\mathbb{N})$  l'espace (vectoriel) des suites réelles  $u = (u_n)$  telles que la série  $\sum |u_n|$  converge. Notons  $\|\cdot\|_1$  l'application de  $E$  dans  $\mathbb{R}$  définie pour tout  $u = (u_n)$  dans  $E$  par

$$\|u\|_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$$

Alors  $\|\cdot\|_1$  est une norme sur  $E$ . En effet, les propriétés de séparation et d'homogénéité sont évidentes.

Montrons l'inégalité triangulaire. Soit  $(u = (u_n), v = (v_n)) \in E^2$ . Alors

$$\sum_{k=0}^n |u_k + v_k| \leq \sum_{k=0}^n (|u_k| + |v_k|) \leq \sum_{k=0}^n |u_k| + \sum_{k=0}^n |v_k| \leq \|u\|_1 + \|v\|_1 \quad (*)$$

17. Plus généralement, on peut montrer que pour tout réel  $p$  supérieur ou égal à 1, les applications  $\|\cdot\|_p : f \mapsto \left( \int_a^b |f(t)|^p dt \right)^{1/p}$  sont des normes sur  $E$ .

Donc la suite des sommes partielles associée à la série à termes positifs  $\sum |u_n + v_n|$  est majorée donc converge. En passant à la limite quand  $n$  tend vers l'infini dans (\*), on a

$$\|u + v\|_1 \leq \|u\|_1 + \|v\|_1$$

5. Soit  $E = \ell^2(\mathbb{N})$  l'espace (vectoriel) des suites réelles  $u = (u_n)$  telles que la série  $\sum u_n^2$  converge. Notons  $\|\cdot\|_2$  l'application de  $E$  dans  $\mathbb{R}$  définie pour tout  $u = (u_n)$  dans  $E$  par

$$\|u\|_2 = \left( \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2 \right)^{1/2}$$

Alors  $\|\cdot\|_2$  est une norme sur  $E$ . En effet, les propriétés de séparation et d'homogénéité sont évidentes.

Montrons l'inégalité triangulaire. Soit  $(u = (u_n), v = (v_n)) \in E^2$ . Alors via l'inégalité de Minkowski p. 30 sur  $\mathbb{R}^{n+1}$  muni du produit scalaire  $\langle x|y \rangle = \sum_{k=0}^n x_k y_k$ ,

on a

$$\sqrt{\sum_{k=0}^n (u_k + v_k)^2} \leq \sqrt{\sum_{k=0}^n u_k^2} + \sqrt{\sum_{k=0}^n v_k^2} \leq \|u\|_2 + \|v\|_2 \quad (**)$$

Donc la suite des sommes partielles associées à la série à termes positifs  $\sum (u_n + v_n)^2$  est majorée donc converge et en passant à la limite quand  $n$  tend vers l'infini dans (\*\*), on a

$$\|u + v\|_2 \leq \|u\|_2 + \|v\|_2$$

6. Soit  $E = \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$  l'espace des matrices à  $n$  lignes et  $p$  colonnes à coefficients dans  $\mathbb{R}$ . Notons  $\|\cdot\|_\infty$  l'application de  $E$  dans  $\mathbb{R}$  définie pour tout  $A = (a_{ij}) \in E$  par

$$\|A\|_\infty = \max_{\substack{i \in [1, n] \\ j \in [1, p]}} |a_{ij}|$$

Alors  $\|\cdot\|_\infty$  est une norme<sup>18</sup> sur  $E$ . En effet, les propriétés de séparation et d'homogénéité sont évidentes.

---

18. On peut également montrer que les applications  $\|\cdot\|_1$  et  $\|\cdot\|_2$  définies pour tout  $A = (a_{ij}) \in E$  respectivement par  $\|A\|_1 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p |a_{ij}|$  et  $\|A\|_2 = \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p a_{ij}^2 \right)^{1/2}$  sont des normes sur  $E$ .



Montrons l'inégalité triangulaire. Soit  $(A = (a_{ij}), B = (b_{ij})) \in E^2$ . Alors pour tout  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket$  on a

$$|a_{ij} + b_{ij}| \leq |a_{ij}| + |b_{ij}| \leq \|A\|_\infty + \|B\|_\infty$$

donc

$$\|A + B\|_\infty \leq \|A\|_\infty + \|B\|_\infty$$

### Remarque

Soit  $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$  un espace préhilbertien réel.

$$\text{Soit } \|\cdot\| : \begin{cases} E & \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto \sqrt{\langle x | x \rangle} \end{cases}$$

Alors l'inégalité de Cauchy-Schwarz p. 28 s'écrit

$$|\langle x | y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$$

De plus,  $\|\cdot\|$  est une norme sur  $E$ <sup>19</sup> car, via la définition d'un produit scalaire, les propriétés de séparation et d'homogénéité sont évidentes, et, via l'inégalité de Minkowski p. 30, on a directement

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

### Proposition 1

Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé. Alors pour tout  $(x, y) \in E^2$ , on a

$$\left| \|x\| - \|y\| \right| \leq \|x - y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

### Démonstration

Soit  $(x, y) \in E^2$ .

L'une des inégalités est évidente car

$$\|x - y\| = \|x + (-y)\| \leq \|x\| + \|-y\| = \|x\| + \|y\|$$

D'autre part  $\|x\| = \|(x - y) + y\| \leq \|x - y\| + \|y\|$  donc

$$\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\| \quad (*)$$

19. appelée *norme associée au produit scalaire*  $\langle \cdot | \cdot \rangle$ .

De même,  $\|y\| = \|(y-x) + x\| \leq \|y-x\| + \|x\| = \|x-y\| + \|x\|$  donc  $\|y\| - \|x\| \leq \|x-y\|$   
d'où

$$-\|x-y\| \leq \|x\| - \|y\| \quad (**)$$

Via les inégalités (\*) et (\*\*), on a finalement

$$-\|x-y\| \leq \|x\| - \|y\| \leq \|x-y\|$$

donc

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x-y\|$$

### 1.2.5 Distance

#### Définition 6

Soit  $E$  un ensemble non vide.

On appelle *distance* sur  $E$  toute application  $d : E^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$  telle que pour tout  $(x, y) \in E^2$ ,

- $d(x, y) = 0 \iff x = y$  (*séparation*)
- $d(y, x) = d(x, y)$  (*symétrie*)
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$  (*inégalité triangulaire*)

On appelle *espace métrique*<sup>20</sup> tout couple  $(E, d)$  où  $E$  est un ensemble non vide et  $d$  une distance sur  $E$ .

#### Remarque

Contrairement à la propriété de séparation pour une norme, il n'est pas possible de montrer l'implication  $x = y \implies d(x, y) = 0$  à partir des deux autres propriétés.

#### Proposition 2

Soit  $(E, d)$  un espace métrique. Alors pour tout  $(x, y, z) \in E^3$ , on a

$$|d(x, y) - d(x, z)| \leq d(y, z)$$

20. La notion de distance est introduite (sous le terme *écart*) par Fréchet (cf. notice biographique p. 96) dans sa thèse de 1906 (cf. p. 30 dans *Sur quelques points du calcul fonctionnel*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, **22**, pp. 1-74) et l'appellation *espace métrique* est due à Hausdorff (cf. notice biographique p. 72) en 1914 (cf. p. 211 dans *Grundzüge der Mengenlehre*, Veit & Comp., Leipzig).

**Démonstration**

Soit  $(x, y, z) \in E^3$ . Alors via l'inégalité triangulaire on a  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$  donc via la symétrie,

$$d(x, y) - d(x, z) \leq d(y, z) \quad (*)$$

De même  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$  donc  $d(x, z) - d(x, y) \leq d(y, z)$  d'où

$$d(x, y) - d(x, z) \geq -d(y, z) \quad (**)$$

Via (\*) et (\*\*), on a finalement

$$|d(x, y) - d(x, z)| \leq d(y, z)$$

**1.2.6 Distance associée à une norme****Définition 7**

Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé. On appelle *distance associée* à  $\|\cdot\|$  l'application  $d : E^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$  définie pour tout  $(x, y) \in E^2$  par

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

**Remarque**

Via les propriétés d'une norme,  $d$  est bien une distance sur  $E$ .

Remarquons que  $d$  vérifie alors deux autres propriétés : pour tout  $(x, y, z) \in E^3$  et pour tout  $\lambda \in \mathbb{K}$ , on a

$$d(x + z, y + z) = d(x, y) \quad \text{et} \quad d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda|d(x, y)$$

En effet

$$d(x + z, y + z) = \|(x + z) - (y + z)\| = \|x - y\| = d(x, y)$$

et

$$d(\lambda x, \lambda y) = \|\lambda x - \lambda y\| = |\lambda|\|x - y\| = |\lambda|d(x, y)$$

**1.2.7 Distance d'un point à une partie d'un espace vectoriel normé**

Soient  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé et  $d$  la distance associée à  $\|\cdot\|$ .

Soit  $A \subset E$  tel que  $A \neq \emptyset$ .

L'ensemble  $\{d(x, a), a \in A\}$  est une partie non vide de  $\mathbb{R}_+$  minorée par 0 et admet donc une borne inférieure d'où la définition suivante.

### Définition 8

Soient  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé,  $d$  la distance associée à  $\|\cdot\|$ ,  $A$  une partie non vide de  $E$  et  $x \in E$ .

On appelle *distance de  $x$  à  $A$*  le réel noté  $d(x, A)$  défini par

$$d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a) = \inf_{a \in A} \|x - a\|$$

## 1.2.8 Produit d'espaces vectoriels normés

Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $n$  espaces vectoriels normés  $(E_1, \|\cdot\|_{E_1}), (E_2, \|\cdot\|_{E_2}), \dots, (E_n, \|\cdot\|_{E_n})$ .

Est-il possible de définir une norme sur  $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$  ?

La proposition suivante donne la réponse.

### Proposition 3

Soient  $(E_1, \|\cdot\|_{E_1}), (E_2, \|\cdot\|_{E_2}), \dots, (E_n, \|\cdot\|_{E_n})$ ,  $n$  espaces vectoriels normés.

Alors  $(E_1 \times \dots \times E_n, \|\cdot\|_\infty)$  est un espace vectoriel normé appelé *espace vectoriel normé produit* où pour tout  $x = (x_1, \dots, x_n) \in E_1 \times \dots \times E_n$ ,

$$\|x\|_\infty = \max_{k \in [1, n]} \|x_k\|_{E_k}$$

### Démonstration

Montrons que  $\|\cdot\|_\infty$  est une norme sur  $E_1 \times \dots \times E_n$ .

Les propriétés de séparation et d'homogénéité sont immédiates. Montrons l'inégalité triangulaire.

Soit  $(x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n)) \in (E_1 \times \dots \times E_n)^2$ .

Alors, comme pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $\|\cdot\|_{E_k}$  est une norme sur  $E_k$ , on a

$$\begin{aligned} \|x_k + y_k\|_{E_k} &\leq \|x_k\|_{E_k} + \|y_k\|_{E_k} \\ &\leq \max_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket} \|x_k\|_{E_k} + \max_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket} \|y_k\|_{E_k} = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty \end{aligned}$$

Donc

$$\|x + y\|_\infty = \max_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket} \|x_k + y_k\|_{E_k} \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$$

### 1.2.9 Convergence d'une suite dans un espace vectoriel normé

#### Définition 9

Soient  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé et  $(x_n)$  une suite de  $E$  (c'est-à-dire, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x_n \in E$ ).

On dit  $(x_n)$  converge vers  $\ell \in E$  (pour la norme  $\|\cdot\|$ ) si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq N \implies \|x_n - \ell\| < \varepsilon$$

#### Remarques

1. L'unicité de la limite se montre comme dans le cas où  $E = \mathbb{R}$  en remplaçant les valeurs absolues par la norme  $\|\cdot\|$ . De la même façon, on montre la stabilité par la somme et le produit par un scalaire. Enfin, il est également immédiat, toujours en remplaçant les valeurs absolues par la norme  $\|\cdot\|$ , que toute suite convergente dans  $E$  est bornée<sup>21</sup>.

2. La limite dépend de la norme choisie.

En effet, soient  $E = C^0([0, 1], \mathbb{R})$  et  $(f_n)$  la suite définie pour tout  $t \in [0, 1]$  par  $f_n(t) = t^n$ .

En reprenant les définitions de  $\|\cdot\|_1$  et  $\|\cdot\|_\infty$  (cf. p. 32), on a

$$\|f_n\|_1 = \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1} \quad \text{et} \quad \|f_n\|_\infty = \sup_{t \in [0, 1]} (t^n) = 1$$

Donc  $(f_n)$  converge vers la fonction nulle pour  $\|\cdot\|_1$  mais pas pour  $\|\cdot\|_\infty$ .

21. Pour le détail des démonstrations dans le cas de  $\mathbb{R}$ , cf. Costantini, *Analyse 1<sup>re</sup> année*, De Boeck (2013).

**Proposition 4**

Soient  $p \in \mathbb{N}^*$ ,  $(E_1 \times \cdots \times E_p, \|\cdot\|_\infty)$  espace vectoriel produit de  $p$  espaces vectoriels normés  $(E_1, \|\cdot\|_{E_1})$ ,  $(E_2, \|\cdot\|_{E_2})$ ,  $\dots$ ,  $(E_p, \|\cdot\|_{E_p})$  et  $(x_n)$  une suite de  $E_1 \times \cdots \times E_p$ .

Notons pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x_n = (x_n^{(1)}, \dots, x_n^{(p)})$ .

Alors  $(x_n)$  converge vers  $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_p) \in E_1 \times \cdots \times E_p$  ssi pour tout  $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$ ,  $(x_n^{(k)})$  converge vers  $\ell_k$ .

**Démonstration**

Soit  $\varepsilon > 0$ .

Comme  $(x_n)$  converge vers  $\ell$ , il existe un rang  $N \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$n \geq N \implies \|x_n - \ell\|_\infty < \varepsilon$$

Ainsi pour tout  $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$ ,

$$n \geq N \implies \|x_n^{(k)} - \ell_k\|_{E_k} \leq \|x_n - \ell\|_\infty < \varepsilon$$

donc pour  $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$ ,  $(x_n^{(k)})$  converge vers  $\ell_k$ .

Réciproquement, supposons que pour tout  $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$ ,  $(x_n^{(k)})$  converge vers  $\ell_k$ .

Soit  $\varepsilon > 0$ .

Alors pour tout  $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$ , il existe un rang  $n_k \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$n \geq n_k \implies \|x_n^{(k)} - \ell_k\|_{E_k} < \varepsilon$$

Ainsi, si  $N = \text{Max}_{k \in \llbracket 1, p \rrbracket} n_k$ , pour tout  $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$  et tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a

$$n \geq N \implies \|x_n^{(k)} - \ell_k\|_{E_k} < \varepsilon$$

d'où

$$n \geq N \implies \|x_n - \ell\|_\infty = \text{Max}_{k \in \llbracket 1, p \rrbracket} \|x_n^{(k)} - \ell_k\|_{E_k} < \varepsilon$$

donc  $(x_n)$  converge vers  $\ell$ .

## 1.3 Topologie dans un espace vectoriel normé

### 1.3.1 Boule ouverte, boule fermée, sphère

#### Définition 10

Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé. On appelle *boule ouverte* (respectivement *boule fermée*) de centre  $a \in E$  et de rayon  $r \in \mathbb{R}_+^*$  l'ensemble noté  $B(a, r)$  ou  $B_E(a, r)$  (respectivement  $\overline{B}(a, r)$  ou  $\overline{B}_E(a, r)$ ) défini par

$$B(a, r) = \{x \in E, \|x - a\| < r\} \quad \left( \text{respectivement } \overline{B}(a, r) = \{x \in E, \|x - a\| \leq r\} \right)$$

On appelle *sphère* de centre  $a \in E$  et de rayon  $r \in \mathbb{R}_+^*$  l'ensemble noté  $S(a, r)$  défini par

$$S(a, r) = \{x \in E, \|x - a\| = r\}$$

#### Exemple

Dans l'espace vectoriel normé  $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ ,  $B(a, r) = ]a - r, a + r[$  et  $\overline{B}(a, r) = [a - r, a + r]$ .

#### Remarque

La représentation graphique des boules dépend de la norme choisie.

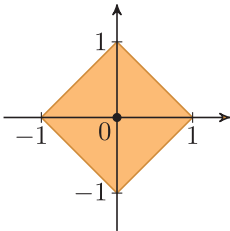
Soient  $E = \mathbb{R}^2$  et  $u = (x, y) \in E$ .

Reprenons les définitions des trois normes sur  $E$  définies p. 31 :

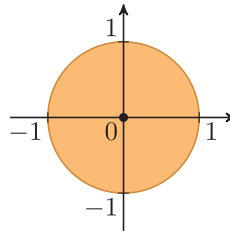
$$\begin{cases} \|u\|_1 = |x| + |y| \\ \|u\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \|u\|_\infty = \text{Max}(|x|, |y|) \end{cases}$$

et représentons graphiquement les boules fermées  $\overline{B}_i(0, 1) = \{x \in E, \|x\|_i \leq 1\}$  pour  $i = 1$ ,  $i = 2$  et  $i = \infty$ .

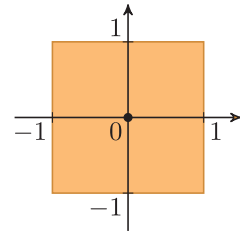
$E = \mathbb{R}^2$



$\overline{B}_1(0, 1)$



$\overline{B}_2(0, 1)$



$\overline{B}_\infty(0, 1)$

**Proposition 5**

Soient  $(E_1, \|\cdot\|_{E_1}), \dots, (E_n, \|\cdot\|_{E_n})$ ,  $n$  espaces vectoriels normés,  $E = E_1 \times \dots \times E_n$  l'espace vectoriel produit<sup>22</sup> muni de la norme  $\|\cdot\|_\infty$ ,  $a = (a_1, \dots, a_n) \in E$  et  $r \in \mathbb{R}_+^*$ .

Alors  $B_E(a, r) = B_{E_1}(a_1, r) \times \dots \times B_{E_n}(a_n, r)$ .

De même  $\overline{B_E}(a, r) = \overline{B_{E_1}}(a_1, r) \times \dots \times \overline{B_{E_n}}(a_n, r)$ .

**Démonstration**

Soit  $x = (x_1, \dots, x_n) \in B_E(a, r)$ . Alors  $\|x - a\|_\infty = \text{Max}_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket} \|x_k - a_k\|_{E_k} < r$ .

Donc pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $\|x_k - a_k\|_{E_k} < r$  d'où  $x_k \in B_{E_k}(a_k, r)$ .

Réciproquement, soit  $x = (x_1, \dots, x_n) \in B_{E_1}(a_1, r) \times \dots \times B_{E_n}(a_n, r)$ .

Alors pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $x_k \in B_{E_k}(a_k, r)$  donc  $\|x_k - a_k\|_{E_k} < r$ .

Ainsi  $\|x - a\|_\infty = \text{Max}_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket} \|x_k - a_k\|_{E_k} < r$  donc  $x = (x_1, \dots, x_n) \in B_E(a, r)$ .

La démonstration est similaire dans le cas des boules fermées.

**Définition 11**

Soient  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé et  $A \subset E$ .

On dit que  $A$  est *borné* s'il existe  $K \in \mathbb{R}_+$  tel que pour tout  $x \in A$ ,  $\|x\| \leq K$ .

**Remarque**

En terme de boule fermée,  $A$  borné signifie qu'il existe  $K \in \mathbb{R}_+$  tel que  $A \subset \overline{B}(0, K)$ .

**1.3.2 Normes équivalentes****Définition 12**

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel,  $\|\cdot\|$  et  $\|\cdot\|'$  deux normes sur  $E$ .

On dit que  $\|\cdot\|$  et  $\|\cdot\|'$  sont *équivalentes*<sup>23</sup> s'il existe  $(\lambda, \mu) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$  tel que pour tout  $x \in E$ ,

$$\lambda\|x\| \leq \|x\|' \leq \mu\|x\|$$

22. On rappelle que pour tout  $x = (x_1, \dots, x_n) \in E_1 \times \dots \times E_n$ ,  $\|x\|_\infty = \text{Max}_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket} \|x_k\|_{E_k}$ .

23. On écrit parfois  $\|\cdot\| \sim \|\cdot\|'$ .



## Remarques

1. Via cette définition de l'équivalence de deux normes,  $\sim$  est une relation d'équivalence.

En effet

- $\sim$  est réflexive.
- $\sim$  est symétrique. En effet, supposons que  $\|\cdot\| \sim \|\cdot\|'$ . Alors il existe  $(\lambda, \mu) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$  tel que pour tout  $x \in E$ ,

$$\lambda\|x\| \leq \|x\|' \leq \mu\|x\|$$

donc

$$\frac{1}{\mu}\|x\|' \leq \|x\| \leq \frac{1}{\lambda}\|x\|'$$

d'où  $\|\cdot\|' \sim \|\cdot\|$ .

- $\sim$  est transitive. En effet, supposons que  $\|\cdot\| \sim \|\cdot\|'$  et  $\|\cdot\|' \sim \|\cdot\|''$ . Alors il existe  $(\lambda, \mu) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$  et  $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$  tels que pour tout  $x \in E$ ,

$$\lambda\|x\| \leq \|x\|' \leq \mu\|x\| \quad \text{et} \quad \alpha\|x\|' \leq \|x\|'' \leq \beta\|x\|'$$

Donc

$$\alpha\lambda\|x\| \leq \|x\|'' \leq \beta\mu\|x\|$$

d'où  $\|\cdot\| \sim \|\cdot\|''$ .

2. Soient  $\|\cdot\|$  et  $\|\cdot\|'$  deux normes équivalentes.

Alors  $\{\|x\|'/\|x\|; x \in E, x \neq 0\}$  (respectivement  $\{\|x\|/\|x\|'; x \in E, x \neq 0\}$ ) est borné. En effet, il existe  $(\lambda, \mu) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$  tel que pour tout  $x \in E$ ,

$$\lambda\|x\| \leq \|x\|' \leq \mu\|x\|$$

donc pour tout  $x \in E$  tel  $x \neq 0$ ,

$$\lambda \leq \frac{\|x\|'}{\|x\|} \leq \mu \quad \left( \text{respectivement} \quad \frac{1}{\mu} \leq \frac{\|x\|}{\|x\|'} \leq \frac{1}{\lambda} \right)$$

Ainsi, s'il existe une suite non nulle  $(x_n)$  de  $E$  telle que la suite  $\left(\frac{\|x_n\|'}{\|x_n\|}\right)$  ou la suite  $\left(\frac{\|x_n\|}{\|x_n\|'}\right)$  n'est pas bornée, alors  $\|\cdot\|$  et  $\|\cdot\|'$  ne sont pas équivalentes.

## Exemples

1. Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $E = \mathbb{R}^n$ . Les normes  $\|\cdot\|_1$ ,  $\|\cdot\|_2$  et  $\|\cdot\|_\infty$  sont équivalentes.

En effet, soit  $x = (x_1, \dots, x_n) \in E$ . Montrons que<sup>24</sup>

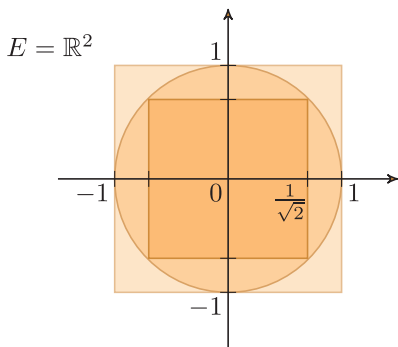
$$\begin{cases} \|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty \\ \|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty \end{cases}$$

Pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $x_k^2 \leq \sum_{k=1}^n x_k^2 = \|x\|_2^2$  donc  $|x_k| \leq \|x\|_2$  d'où  $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2$ .

D'autre part, pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $x_k^2 \leq \|x\|_\infty^2$  donc  $\sum_{k=1}^n x_k^2 \leq n\|x\|_\infty^2$

d'où  $\|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty$ .

Ainsi,  $\|\cdot\|_2$  et  $\|\cdot\|_\infty$  sont équivalentes.



Si les boules fermées sont « emboîtées », les normes sont équivalentes.

$$\overline{B_\infty}\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \subset \overline{B_2}(0, 1) \subset \overline{B_\infty}(0, 1)$$

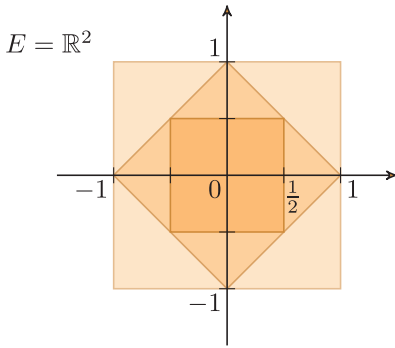
$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{2}\|x\|_\infty$$

D'autre part, pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $|x_k| \leq \sum_{k=1}^n |x_k| = \|x\|_1$  donc  $\|x\|_\infty \leq \|x\|_1$ .

Enfin, pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $|x_k| \leq \|x\|_\infty$  donc  $\|x\|_1 = \sum_{k=1}^n |x_k| \leq n\|x\|_\infty$ .

Ainsi  $\|\cdot\|_1$  et  $\|\cdot\|_\infty$  sont équivalentes et par transitivité  $\|\cdot\|_1$  et  $\|\cdot\|_2$  le sont également.

24. En reprenant les notations de la remarque p. 41, l'inégalité  $\|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty$  est équivalente à l'inclusion  $\overline{B_\infty}(0, 1/\sqrt{n}) \subset \overline{B_2}(0, 1)$  ou encore à l'inclusion  $\overline{B_\infty}(0, 1) \subset \overline{B_2}(0, \sqrt{n})$ . Graphiquement, en prenant par exemple  $n = 2$ , la boule fermée  $\overline{B_\infty}(0, 1/\sqrt{2})$  peut s'emboîter dans la boule fermée  $\overline{B_2}(0, 1)$ .



$$\overline{B_\infty(0, \frac{1}{2})} \subset \overline{B_1(0, 1)} \subset \overline{B_\infty(0, 1)}$$

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq 2\|x\|_\infty$$

2. Soient  $E = C^0([0, 1], \mathbb{R})$  et  $(f_n)$  la suite définie pour tout  $t \in [0, 1]$  par  $f_n(t) = t^n$ .

En reprenant les définitions de  $\|\cdot\|_1$  et  $\|\cdot\|_\infty$  (cf. p. 32), on a

$$\left\{ \begin{array}{l} \|f_n\|_1 = \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1} \\ \|f_n\|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} (t^n) = 1 \\ \|f_n\|_2 = \left( \int_0^1 t^{2n} dt \right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \end{array} \right.$$

En particulier on a

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\|f_n\|_2}{\|f_n\|_1} = \frac{n+1}{\sqrt{2n+1}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty \\ \frac{\|f_n\|_\infty}{\|f_n\|_1} = n+1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty \\ \frac{\|f_n\|_\infty}{\|f_n\|_2} = \sqrt{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty \end{array} \right.$$

Via la deuxième remarque p. 43, on en déduit que les normes  $\|\cdot\|_1$  et  $\|\cdot\|_2$ ,  $\|\cdot\|_1$  et  $\|\cdot\|_\infty$ ,  $\|\cdot\|_2$  et  $\|\cdot\|_\infty$  ne sont pas équivalentes. Ainsi, deux quelconques des normes  $\|\cdot\|_1$ ,  $\|\cdot\|_2$  et  $\|\cdot\|_\infty$  ne sont pas équivalentes.

**Proposition 6**

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel,  $\|\cdot\|$  et  $\|\cdot\|'$  deux normes sur  $E$ . Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i)  $\|\cdot\|$  et  $\|\cdot\|'$  sont équivalentes.
- (ii) Toute suite  $(x_n)$  de  $E$  converge vers  $\ell \in E$  pour la norme  $\|\cdot\|$  ssi  $(x_n)$  converge vers  $\ell$  pour la norme  $\|\cdot\|'$ .

**Démonstration**

**(i)  $\implies$  (ii)** Supposons que  $\|\cdot\|$  et  $\|\cdot\|'$  sont équivalentes.

Alors il existe  $(\lambda, \mu) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$  tel que pour tout  $x \in E$ ,

$$\lambda\|x\| \leq \|x\|' \leq \mu\|x\| \quad (*)$$

Soit  $\varepsilon > 0$ .

Supposons que  $(x_n)$  converge vers  $\ell$  pour la norme  $\|\cdot\|$ .

Alors il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$n \geq N \implies \|x_n - \ell\| < \frac{\varepsilon}{\mu}$$

Ainsi, via la deuxième inégalité de (\*), pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$n \geq N \implies \|x_n - \ell\|' \leq \mu\|x_n - \ell\| \leq \mu \frac{\varepsilon}{\mu} = \varepsilon$$

donc  $(x_n)$  converge vers  $\ell$  pour la norme  $\|\cdot\|'$ .

Réciproquement, supposons que  $(x_n)$  converge vers  $\ell$  pour la norme  $\|\cdot\|'$ .

Alors il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$n \geq N \implies \|x_n - \ell\|' < \lambda\varepsilon$$

Ainsi, via la première inégalité de (\*), pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$n \geq N \implies \|x_n - \ell\| \leq \frac{1}{\lambda}\|x_n - \ell\|' \leq \frac{1}{\lambda}\lambda\varepsilon = \varepsilon$$

donc  $(x_n)$  converge vers  $\ell$  pour la norme  $\|\cdot\|$ .

**(ii)  $\implies$  (i)** Supposons la seconde assertion.

Supposons par l'absurde que  $\|\cdot\|$  et  $\|\cdot\|'$  ne sont pas équivalentes.

Alors  $\left\{ \begin{array}{l} \text{pour tout } \mu \in \mathbb{R}_+^*, \text{ il existe } x \in E \text{ tel que } \|x\|' > \mu\|x\| \\ \text{ou} \\ \text{pour tout } \lambda \in \mathbb{R}_+^*, \text{ il existe } x \in E \text{ tel que } \lambda\|x\| > \|x\|' \end{array} \right.$

Quitte à échanger le rôle des deux normes, supposons que pour tout  $\mu \in \mathbb{R}_+^*$ , il existe  $x \in E$  tel que  $\|x\|' > \mu\|x\|$ .

Alors, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , en prenant successivement  $\mu = 1, \mu = 2, \dots, \mu = n$ , il existe une suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  de  $E$  telle que

$$\|x_n\|' > n\|x_n\| \quad (**)$$

Cette inégalité stricte implique que la suite  $(x_n)$  est non nulle.

Soit à présent la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  définie pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  par

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{x_n}{\|x_n\|}$$

Alors  $\|u_n\| = \frac{1}{\sqrt{n}\|x_n\|} \|x_n\| = \frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  donc  $(u_n)$  converge vers 0 pour la norme  $\|\cdot\|$ .

Or, via l'inégalité (\*\*),

$$\|u_n\|' = \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\|x_n\|'}{\|x_n\|} > \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$$

donc  $(u_n)$  ne converge pas vers 0 pour la norme  $\|\cdot\|'$  d'où une contradiction avec l'hypothèse.

### Remarque

Ainsi pour deux normes équivalentes, la notion de convergence coïncide.

### 1.3.3 Voisinage

#### Définition 13

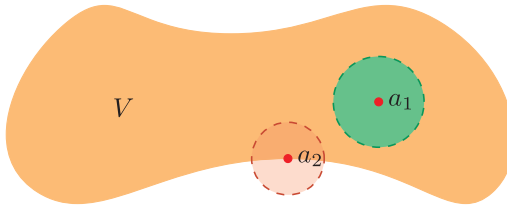
Soient  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé,  $V \subset E$  et  $a \in E$ .

On dit que  $V$  est un *voisinage*<sup>25</sup> de  $a$  (dans  $E$ ) si  $V$  contient une boule ouverte de centre  $a$  c'est-à-dire s'il existe  $r \in \mathbb{R}_+^*$  tel que  $B(a, r) \subset V$ .

25. La notion moderne de voisinage est introduite en 1914 par Hausdorff (cf. notice biographique p. 72 et p. 212 de son ouvrage *Grundzüge der Mengenlehre*, Veit & Comp., Leipzig).

## Notation

On note  $\mathcal{V}_E(a)$  l'ensemble des voisinages de  $a$  (dans  $E$ ).



$V$  est un voisinage de  $a_1$  mais n'est pas un voisinage de  $a_2$ .

## Remarques

1. Si  $V$  est un voisinage de  $a$ ,  $a \in V$  car il existe  $r \in \mathbb{R}_+^*$  tel que  $B(a, r) \subset V$  et  $a \in B(a, r)$ .
2. Si  $V$  est un voisinage de  $a$  et  $A$  est une partie de  $E$  contenant  $V$ , alors  $A$  est un voisinage de  $a$ . En effet, il existe  $r \in \mathbb{R}_+^*$  tel que  $B(a, r) \subset V$  or  $V \subset A$  donc  $B(a, r) \subset A$  donc  $A$  est un voisinage de  $a$ .

## Proposition 7

Soient  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé et  $a \in E$ .

1. Une réunion quelconque<sup>26</sup> de voisinages de  $a$  est un voisinage de  $a$ .
2. Une intersection finie de voisinages de  $a$  est un voisinage de  $a$ .

## Démonstration

1. Soient  $I$  un ensemble non vide et  $(V_i)_{i \in I}$  une famille de voisinages de  $a$ .

Comme pour tout  $i \in I$ ,  $V_i \subset \bigcup_{i \in I} V_i$ , via la remarque précédente,  $\bigcup_{i \in I} V_i$  est un voisinage de  $a$ .

2. Soit  $(V_1, \dots, V_n)$  une famille de  $n$  voisinages de  $a$ . Alors pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , il existe  $r_k \in \mathbb{R}_+^*$  tel que  $B(a, r_k) \subset V_k$ .

Soit  $r = \text{Min}_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket} r_k$ . Alors  $r \in \mathbb{R}_+^*$  et  $B(a, r) = \bigcap_{k=1}^n B(a, r_k) \subset \bigcap_{k=1}^n V_k$

donc  $\bigcap_{k=1}^n V_k$  est un voisinage de  $a$ .

26. c'est-à-dire  $\bigcup_{i \in I} V_i$  où  $I$  un ensemble non vide et  $(V_i)_{i \in I}$  une famille de voisinages de  $a$ .

**Remarque**

Une intersection quelconque de voisinages de  $a$  n'est pas un nécessairement un voisinage de  $a$ .

Par exemple pour  $E = \mathbb{R}$  muni de la valeur absolue,  $\left( \left] -\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right[ \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est une famille de voisinages de 0.

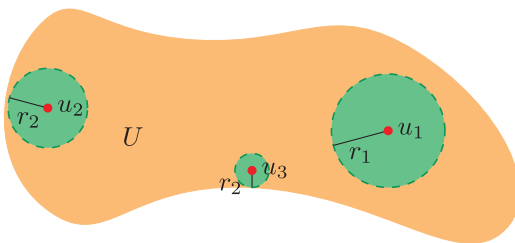
Or  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left] -\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right[ = \{0\}$  n'est pas un voisinage de 0.

**1.3.4 Ouvert, fermé****Définition 14**

Soient  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé et  $U \subset E$ . On dit que  $U$  est un *ouvert*<sup>27,28</sup> de  $E$  si  $U$  est un voisinage de chacun de ses points c'est-à-dire si

$$\forall u \in U \quad \exists r \in \mathbb{R}_+^* \quad B(u, r) \subset U$$

On dit que  $F \subset E$  est un *fermé*<sup>29,30</sup> de  $E$  si le complémentaire de  $F$  dans  $E$ , noté  $E \setminus F$  ou  $\complement_E(F)$ , est un ouvert de  $E$ .



$U$  est un voisinage de chacun de ses points.

27. On dit aussi  $U$  est *ouvert* dans  $E$ .

28. Cette notion est introduite (sous le terme allemand *Gebiet*, c'est-à-dire *domaine*) par Hausdorff en 1914 (cf. notice biographique p. 72 et p. 215 de son ouvrage *Grundzüge der Mengenlehre*, Veit & Comp., Leipzig) et l'appellation *sous-ensemble ouvert* est due à Carathéodory (1873-1950) en 1918 (cf. p. 40 de son ouvrage *Vorlesungen über reellen Funktionen*, Teubner, Leipzig).

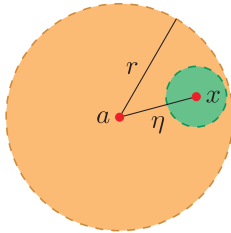
29. On dit aussi  $F$  est *fermé* dans  $E$ .

30. La notion d'ensemble fermé est due à Cantor (cf. notice biographique p. 369) en 1884 (cf. p. 470 du numéro 6 de son article *Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten*, *Mathematische Annalen*, **23**, pp. 453-488).

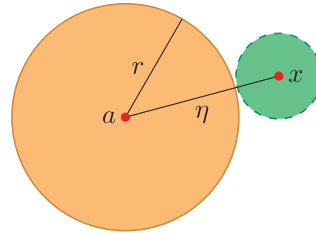
### Théorème 3 (Dedekind (vers 1871)<sup>31</sup>-Hausdorff<sup>32,33</sup> (1914)<sup>34</sup>)

Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé. Alors

1. Toute boule ouverte est un ouvert de  $E$ .
2. Toute boule fermée est un fermé de  $E$ .
3. Une réunion quelconque d'ouverts de  $E$  est un ouvert de  $E$ .
4. Une intersection finie d'ouverts de  $E$  est un ouvert de  $E$ .
5. Une réunion finie de fermés de  $E$  est un fermé de  $E$ .
6. Une intersection quelconque de fermés de  $E$  est un fermé de  $E$ .



Une boule ouverte est un ouvert.



Une boule fermée est un fermé.

### Démonstration

1. Soient  $a \in E$  et  $r \in \mathbb{R}_+^*$ . Montrons que  $B(a, r)$  est un ouvert de  $E$ .

Soit  $x \in B(a, r)$ . Notons  $\eta = \|x - a\|$ . Alors  $\eta < r$  car  $x \in B(a, r)$ .

Montrons que  $B(x, r - \eta) \subset B(a, r)$ .

Soit  $y \in B(x, r - \eta)$ . Alors  $\|y - x\| < r - \eta$

donc

$$\|y - a\| = \|y - x + x - a\| \leq \|y - x\| + \|x - a\| \leq r - \eta + \eta = r$$

d'où  $y \in B(a, r)$ . Ainsi  $B(a, r)$  est un ouvert de  $E$ .

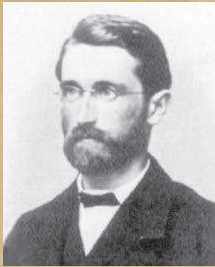
31. Dedekind montre déjà vers 1871 le premier item de ce théorème dans son article *Allgemeine Sätze über Räume* publié dans ses œuvres complètes (cf. pp. 353-355 dans *Gesammelte mathematische Werke*, 2, Vieweg, Braunschweig (1931)).

32. cf. notice biographique p. 72.

33. Ces résultats ne sont pas connus sous le nom de théorème de Dedekind-Hausdorff mais peuvent être attribués à ces deux mathématiciens (cf. notes 31 et 34).

34. cf. p. 216 de son ouvrage *Grundzüge der Mengenlehre*, Veit & Comp., Leipzig.





**Richard Dedekind**  
(1831–1916)

Originaire de Brunswick, Richard Dedekind s'intéresse dès sa plus tendre enfance à la physique et la chimie mais considère que ces matières manquent de rigueur. Il se tourne alors vers les mathématiques et s'intéressera, comme Cantor<sup>a</sup> aux fondements de cette discipline. Il entre à l'université de Göttingen en 1850 et suit avec grand intérêt le cours de Gauss<sup>b</sup> sur la méthode des moindres carrés<sup>c</sup>. À peine deux ans plus tard, il soutient sa thèse, sous sa direction, sur les intégrales eulériennes<sup>d</sup>. Il passe sa thèse d'habilitation la même année que Riemann<sup>e</sup> en 1854 et commence à enseigner les probabilités et la géométrie au sein de son université. La nomination de Lejeune-Dirichlet<sup>f</sup> pour succéder à Gauss est déterminante pour l'orientation des recherches de Dedekind car c'est un spécialiste de la théorie des nombres<sup>g</sup>. Outre les cours de cet illustre mathématicien sur l'intégrale définie, la théorie des nombres et les équations aux dérivées partielles, Dedekind étudie scrupuleusement les travaux de Galois sur la théorie des groupes et est le premier à exposer dans une université allemande les théories galoisiennes. À partir de 1858, il enseigne à l'École polytechnique de Zürich puis en 1862 est nommé à l'École polytechnique de sa ville natale, poste qu'il conserve jusqu'en 1894. L'œuvre de Dedekind est remarquable car elle amorce, via une approche rigoureuse et axiomatique, le fondement de trois domaines essentiels des mathématiques : la théorie des groupes<sup>h</sup>, la topologie et l'arithmétique<sup>i</sup>.

a. cf. notice biographique p. 369.

b. notice biographique p. 207.

c. Il relate bien plus tard dans un article de 1901 son souvenir ému de ce cours dispensé par son maître (cf. *Gauß in seiner Vorlesung über die Methode der kleinsten Quadrate*, Festschrift zur Feier des hundertfünfzigjährigen Bestehens der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Beiträge zur Gelehrten-geschichte Göttingens, pp. 45-59).

d. cf. *Über die Elemente der Theorie der Eulerschen Integrale* extrait de *Gesammelte mathematische Werke*, 1, Vieweg, Braunschweig (1930) pp. 1-26.

e. cf. notice biographique p. 153.

f. cf. notice biographique p. 317.

g. Dedekind devient vite très proche de Lejeune-Dirichlet et édite après la mort de ce dernier quatre éditions de ses cours, baptisés *Vorlesung über Zahlentheorie*, parmi lesquelles il écrit des suppléments notamment sur la notion d'idéal.

h. cf. par exemple *Abriss einer Theorie der höheren Kongruenzen in bezug auf einen reellen Primzahl-Modulus*, Journal de Crellé, 54, pp. 1-26 (1857).

i. On lui doit notamment la notion d'idéal et de coupure (cf. par exemple son ouvrage *Stetigkeit und irrationale Zahlen*, Vieweg, Braunschweig (1872)).

2. Soient  $a \in E$  et  $r \in \mathbb{R}_+^*$ . Montrons que  $\overline{B}(a, r)$  est un fermé de  $E$  c'est-à-dire que  $E \setminus \overline{B}(a, r)$  est un ouvert de  $E$ .

Soit  $x \in E \setminus \overline{B}(a, r)$ . Notons  $\eta = \|x - a\|$ . Alors  $\eta > r$  car  $x \notin \overline{B}(a, r)$ .

Montrons que  $B(x, \eta - r) \subset E \setminus \overline{B}(a, r)$ .

Soit  $y \in B(x, \eta - r)$ . Alors  $\|x - y\| < \eta - r$  donc

$$\eta - \|x - y\| > r \quad (*)$$

De plus  $\|x - a\| = \|x - y + y - a\| \leq \|x - y\| + \|y - a\|$  donc, l'inégalité (\*), on a

$$\|y - a\| \geq \|x - a\| - \|x - y\| = \eta - \|x - y\| > r$$

d'où  $y \notin \overline{B}(a, r)$  c'est-à-dire  $y \in E \setminus \overline{B}(a, r)$ . Ainsi  $E \setminus \overline{B}(a, r)$  est un ouvert de  $E$ .

3. Soient  $I$  un ensemble et  $(U_i)_{i \in I}$  une famille d'ouverts de  $E$ . Montrons que  $\bigcup_{i \in I} U_i$  est un ouvert de  $E$  c'est-à-dire un voisinage de chacun de ses points.

Soit  $x \in \bigcup_{i \in I} U_i$ . Alors il existe  $i \in I$  tel que  $x \in U_i$ . Or  $U_i$  est un ouvert de  $E$ , donc en particulier un voisinage de  $x$ , et  $U_i \subset \bigcup_{i \in I} U_i$  donc via la deuxième remarque p. 48,  $\bigcup_{i \in I} U_i$  est un voisinage de  $x$ .

4. Soit  $(U_1, \dots, U_n)$  une famille de  $n$  ouverts de  $E$ . Montrons que  $\bigcap_{k=1}^n U_k$  est un ouvert de  $E$  c'est-à-dire un voisinage de chacun de ses points.

Soit  $x \in \bigcap_{k=1}^n U_k$ . Alors pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $x \in U_k$  or tous les  $U_k$  sont des ouverts de  $E$  donc, en particulier voisinages de  $x$ .

Via la proposition 7 (p. 48),  $\bigcap_{k=1}^n U_k$  est un voisinage de  $x$ .

5. Soit  $(F_1, \dots, F_n)$  une famille de  $n$  fermés de  $E$ . Montrons que  $\bigcup_{k=1}^n F_k$  est un fermé de  $E$  c'est-à-dire  $E \setminus \bigcup_{k=1}^n F_k$  est un ouvert de  $E$ .

Comme  $E \setminus F_1, \dots, E \setminus F_n$  sont  $n$  ouverts de  $E$ , via l'assertion précédente de cette proposition,  $\bigcap_{k=1}^n E \setminus F_k = E \setminus \bigcup_{k=1}^n F_k$  est un ouvert de  $E$ .

6. Soient  $I$  un ensemble et  $(F_i)_{i \in I}$  une famille de fermés de  $E$ . Montrons que  $\bigcap_{i \in I} F_i$  est un fermé de  $E$  c'est-à-dire  $E \setminus \bigcap_{i \in I} F_i$  est un ouvert de  $E$ .

Comme  $(E \setminus F_i)_{i \in I}$  est une famille d'ouverts de  $E$ , via la troisième assertion de cette proposition,  $\bigcup_{i \in I} E \setminus F_i = E \setminus \bigcap_{i \in I} F_i$  est un ouvert de  $E$ .

## Exemples

1.  $E$  et  $\emptyset$  sont des ouverts de  $E$  mais sont aussi des fermés de  $E$  car  $E \setminus E = \emptyset$  et  $E \setminus \emptyset = E$  sont des ouverts de  $E$ .

2. Il existe également des ensembles ni ouvert, ni fermé. Par exemple dans l'espace vectoriel normé  $(E = \mathbb{R}, | \cdot |)$ ,  $[0, 1[$  n'est ni ouvert, ni fermé.

En effet,  $[0, 1[$  n'est pas un voisinage de 0 car pour tout  $r \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $] -r, r[ \not\subset [0, 1[$  donc  $[0, 1[$  n'est pas un ouvert de  $E$ .

De même  $[0, 1[$  n'est pas un fermé de  $E$  car  $E \setminus [0, 1[ = ] -\infty, 0[ \cup [1, +\infty[$  n'est pas un ouvert de  $E$  car n'est pas un voisinage de 1 : en effet, pour tout  $r \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $]1 - r, 1 + r[ \not\subset ] -\infty, 0[ \cup [1, +\infty[$ .

3. Dans un espace vectoriel normé  $(E, \| \cdot \|)$ , tout singleton  $\{x\}$  est un fermé de  $E$ .

En effet,  $E \setminus \{x\}$  est un ouvert de  $E$  car pour tout  $y \in E \setminus \{x\}$ ,

$$B(y, \|y - x\|) \subset E \setminus \{x\}$$

4. Dans un espace vectoriel normé  $(E, \| \cdot \|)$ , toute partie finie est un fermé de  $E$  car réunion d'un nombre fini de singletons.

## Remarques

1. Une intersection quelconque d'ouverts d'un espace vectoriel normé  $(E, \| \cdot \|)$  n'est pas nécessairement un ouvert de  $E$ .

Par exemple dans  $(\mathbb{R}, | \cdot |)$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $U_n = ] -\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[$  est un ouvert de  $\mathbb{R}$  or  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} U_n = \{0\}$  n'est pas un ouvert de  $\mathbb{R}$  car pour tout  $r \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $]r, r[ \not\subset \{0\}$ .

2. Une réunion quelconque de fermés d'un espace vectoriel normé  $(E, \| \cdot \|)$  n'est pas nécessairement un fermé de  $E$ .

Par exemple dans  $(\mathbb{R}, | \cdot |)$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $F_n = [\frac{1}{n}, 1]$  est un fermé de  $\mathbb{R}$  or  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} F_n = ]0, 1]$  n'est pas un fermé de  $\mathbb{R}$ .

**Proposition 8**

Soient  $(E_1 \times \cdots \times E_n, \|\cdot\|_\infty)$  espace vectoriel produit de  $n$  espaces vectoriels normés  $(E_1, \|\cdot\|_{E_1}), \dots, (E_n, \|\cdot\|_{E_n})$ .

1. Soient  $U_1, \dots, U_n$ ,  $n$  ouverts respectivement de  $E_1, \dots, E_n$ .  
Alors  $U_1 \times \cdots \times U_n$  est un ouvert de  $E_1 \times \cdots \times E_n$ .
2. Soient  $F_1, \dots, F_n$ ,  $n$  fermés respectivement de  $E_1, \dots, E_n$ .  
Alors  $F_1 \times \cdots \times F_n$  est un fermé de  $E_1 \times \cdots \times E_n$ .

**Démonstration**

1. Soit  $x = (x_1, \dots, x_n) \in U_1 \times \cdots \times U_n$ .

On cherche  $r \in \mathbb{R}_+^*$  tel que  $B_E(x, r) \subset U_1 \times \cdots \times U_n$ .

Comme les  $U_k$  sont des ouverts de  $E$ , pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , il existe  $r_k \in \mathbb{R}_+^*$  tel que  $B(x_k, r_k) \subset U_k$ .

Notons  $r = \min_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket} r_k$ .

Via la proposition 5 (p. 42), on a

$$B_E(x, r) = B_{E_1}(x_1, r) \times \cdots \times B_{E_n}(x_n, r) \subset B_{E_1}(x_1, r_1) \times \cdots \times B_{E_n}(x_n, r_k) \subset U_1 \times \cdots \times U_n$$

Donc  $U_1 \times \cdots \times U_n$  est un ouvert de  $E_1 \times \cdots \times E_n$ .

2. Montrons que  $E_1 \times \cdots \times E_n \setminus F_1 \times \cdots \times F_n$  est un ouvert de  $E_1 \times \cdots \times E_n$ .

Remarquons que

$$\begin{aligned} x = (x_1, \dots, x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n \setminus F_1 \times \cdots \times F_n &\iff x \notin F_1 \times \cdots \times F_n \\ &\iff \exists k \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_k \notin F_k \\ &\iff \exists k \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_k \in E_k \setminus F_k \end{aligned}$$

Donc

$$E_1 \times \cdots \times E_n \setminus F_1 \times \cdots \times F_n = \bigcup_{k=1}^n U_k$$

où pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,

$$U_k = E_1 \times \cdots \times E_{k-1} \times (E_k \setminus F_k) \times E_{k+1} \times \cdots \times E_n$$

Or, via la première assertion de la proposition, chaque  $U_k$  est un ouvert de  $E_1 \times \cdots \times E_n$  donc, via le théorème 3 (p. 50),  $E_1 \times \cdots \times E_n \setminus F_1 \times \cdots \times F_n$  est un ouvert de  $E_1 \times \cdots \times E_n$ .

### 1.3.5 Intérieur, adhérence et frontière

#### Définition 15

Soient  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé,  $A \subset E$  et  $a \in A$ .

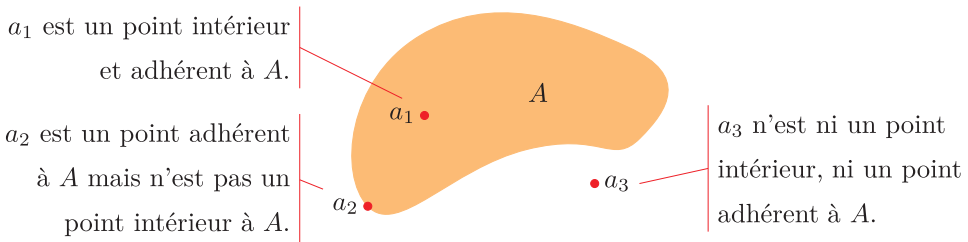
1. On dit que  $a$  est un *point intérieur* à  $A$  si  $A$  est un voisinage de  $a$  c'est-à-dire s'il existe  $r \in \mathbb{R}_+^*$  tel que  $B(a, r) \subset A$ .

L'ensemble des points intérieurs à  $A$  est appelé *intérieur* de  $A$  et noté  $\overset{\circ}{A}$ .

2. On dit que  $a$  est un *point adhérent* à  $A$  si tout voisinage de  $a$  rencontre  $A$  c'est-à-dire si pour tout voisinage  $V$  de  $a$ ,  $V \cap A \neq \emptyset$ .

L'ensemble des points adhérents à  $A$  est appelé *adhérence* de  $A$  et noté  $\overline{A}$ .

3. On appelle *frontière* de  $A$ , l'ensemble noté  $\text{Fr}(A) = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$ .



#### Remarque

$$a \in \overline{A} \iff \forall r \in \mathbb{R}_+^* \quad B(a, r) \cap A \neq \emptyset.$$

En effet, supposons que  $a \in \overline{A}$ . Alors pour tout voisinage  $V$  de  $a$ ,  $V \cap A \neq \emptyset$ . En particulier, pour tout  $r \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $B(a, r)$  est un voisinage de  $a$  donc  $B(a, r) \cap A \neq \emptyset$ .

Réciproquement supposons que pour tout  $r \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $B(a, r) \cap A \neq \emptyset$  et soit  $V$  un voisinage de  $a$ . Alors il existe  $r' \in \mathbb{R}_+^*$  tel que  $B(a, r') \subset V$ .

Or  $B(a, r') \cap A \neq \emptyset$ . Soit  $x \in B(a, r') \cap A$ . Alors  $x \in A$  et  $x \in B(a, r') \subset V$  donc  $V \cap A \neq \emptyset$  d'où  $a \in \overline{A}$ .

**Exemple**

Dans l'espace vectoriel normé  $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ , toute partie  $A$  non vide et majorée (respectivement minorée) admet une borne supérieure (respectivement inférieure)  $a$ . Montrons dans le cas d'une borne supérieure  $a$  (le raisonnement étant similaire dans le cas d'une borne inférieure) que  $a \in \overline{A}$ .

Soit  $r \in \mathbb{R}_+^*$ . Par définition de  $a$ ,  $a - r$  n'est pas un majorant de  $A$  donc il existe  $x \in A$  tel que  $x > a - r$  et  $x \leq a < a + r$ . Donc  $]a - r, a + r[ \cap A \neq \emptyset$  d'où  $a \in \overline{A}$ .

**Remarque**

Par définition de  $\overset{\circ}{A}$ ,  $\overset{\circ}{A} \subset A$  et  $A \subset \overline{A}$  car si  $a \in A$  et  $V$  est un voisinage de  $A$ ,  $a \in V \cap A$  donc  $V \cap A \neq \emptyset$ .

Ainsi  $\overset{\circ}{A} \subset A \subset \overline{A}$ .

**Proposition 9**

Soient  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé et  $A \subset E$ . Alors

1.  $\overset{\circ}{A}$  est le plus grand ouvert de  $E$  inclus dans  $A$ .
2.  $A$  ouvert de  $E \iff A = \overset{\circ}{A}$ .
3.  $E \setminus \overline{A} = \overset{\circ}{E \setminus A}$ .
4.  $\overline{E \setminus A} = E \setminus \overset{\circ}{A}$ .
5.  $\overline{A}$  est le plus petit fermé de  $E$  contenant  $A$ .
6.  $A$  fermé de  $E \iff A = \overline{A}$ .
7.  $\text{Fr}(A)$  est un fermé de  $E$ .

**Démonstration**

1. Montrons tout d'abord que  $\overset{\circ}{A}$  est un ouvert de  $E$ .

Soit  $a \in \overset{\circ}{A}$ . Montrons que  $\overset{\circ}{A}$  est un voisinage de  $a$ .

Via la définition de  $\overset{\circ}{A}$ , il existe  $r \in \mathbb{R}_+^*$  tel que  $B(a, r) \subset A$ .

Donc  $B(a, r) \subset \overset{\circ}{A}$ . En effet, soit  $x \in B(a, r)$ . Via le théorème 3 (p. 50),  $B(a, r)$  est un ouvert de  $E$  donc il existe  $r' \in \mathbb{R}_+^*$  tel que  $B(x, r') \subset B(a, r)$  or  $B(a, r) \subset A$  donc  $B(x, r') \subset A$ .

Ainsi  $x \in \overset{\circ}{A}$ .

Montrons à présent que  $\overset{\circ}{A}$  est *le plus grand* ouvert de  $E$  inclus dans  $A$ .

Soit  $U$  un ouvert de  $E$  inclus dans  $A$ . Montrons que  $U \subset \overset{\circ}{A}$ .

Soit  $x \in U$ . Comme  $U$  est un ouvert de  $E$ , il existe  $r \in \mathbb{R}_+^*$  tel que  $B(x, r) \subset U$ .

Or  $U \subset A$  donc  $B(x, r) \subset A$  d'où  $x \in \overset{\circ}{A}$ .

2. Soit  $A$  un ouvert de  $E$ .

Le plus grand ouvert de  $E$  contenu dans  $A$  est  $A$  donc  $\overset{\circ}{A} = A$ .

Réciproquement si  $A = \overset{\circ}{A}$ , comme  $\overset{\circ}{A}$  est un ouvert de  $E$ ,  $A$  est un ouvert de  $E$ .

3. Supposons  $x \in E \setminus \overline{A}$ . Alors  $x \notin \overline{A}$  donc il existe un voisinage  $V$  de  $x$  tel que  $V \cap A = \emptyset$ . Ainsi  $V \subset E \setminus A$  et comme  $V$  est un voisinage de  $x$ , il existe  $r \in \mathbb{R}_+^*$  tel que  $B(x, r) \subset V \subset E \setminus A$ .

Donc  $E \setminus A$  est un voisinage de  $x$  donc  $x \in \overset{\circ}{E \setminus A}$ .

Réciproquement, soit  $x \in \overset{\circ}{E \setminus A}$ . Alors il existe  $r \in \mathbb{R}_+^*$  tel que  $B(x, r) \subset E \setminus A$ . Donc  $B(x, r) \cap A = \emptyset$  d'où  $x \notin \overline{A}$  donc  $x \in E \setminus \overline{A}$ .

4. En appliquant l'assertion précédente à  $E \setminus A$ , on a :  $E \setminus (\overline{E \setminus A}) = \overset{\circ}{E \setminus (E \setminus A)} = \overset{\circ}{A}$ .

donc  $E \setminus \overset{\circ}{A} = E \setminus (\overset{\circ}{E \setminus (E \setminus A)}) = \overline{E \setminus A}$ .

5.  $\overline{A}$  est un fermé de  $E$  car, via l'assertion précédente,  $E \setminus \overline{A} = \overset{\circ}{E \setminus A}$  est un ouvert de  $E$ .

Montrons à présent que  $\overline{A}$  est *le plus petit* fermé de  $E$  contenant  $A$ .

Soit  $F$  un fermé de  $E$  contenant  $A$ . Montrons que  $\overline{A} \subset F$ .

Supposons que  $\overline{A} \not\subset F$ . Alors il existe  $x \in \overline{A}$  tel que  $x \notin F$ . Donc  $x \in E \setminus F$ . Or  $E \setminus F$  est un ouvert de  $E$  donc il existe  $r \in \mathbb{R}_+^*$  tel que

$$B(x, r) \subset E \setminus F \quad (**)$$

D'autre part, comme  $x \in \overline{A}$ , en particulier  $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$ . Or  $A \subset F$  donc  $B(x, r) \cap F \neq \emptyset$  d'où une contradiction avec l'assertion (\*\*).

6. Soit  $A$  un fermé de  $E$ . Le plus petit fermé de  $E$  contenant  $A$  est  $A$  donc  $\overline{A} = A$ .

Réciproquement, si  $A = \overline{A}$ , via l'assertion précédente  $A$  est un fermé de  $E$  car  $\overline{A}$  est un fermé de  $E$ .

7. Remarquons que  $\overline{A} \setminus \overset{\circ}{A} = \overline{A} \cap (E \setminus \overset{\circ}{A})$ .

En effet,  $x \in \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A} \iff x \in \overline{A}$  et  $x \notin \overset{\circ}{A} \iff x \in \overline{A}$  et  $x \in E \setminus \overset{\circ}{A}$ .

Donc, via la quatrième assertion de cette proposition,

$$\text{Fr}(A) = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A} = \overline{A} \cap (E \setminus \overset{\circ}{A}) = \overline{A} \cap \overline{E \setminus \overset{\circ}{A}}$$

Ainsi,  $\text{Fr}(A)$ , intersection de deux fermés de  $E$ , est un fermé de  $E$ .

### Proposition 10

Soient  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé,  $A \subset E$  et  $B \subset E$ . Alors

1.  $A \subset B \implies \overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$ .
2.  $A \subset B \implies \overline{A} \subset \overline{B}$ .
3.  $\overset{\circ}{A \cap B} = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$ .
4.  $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ .
5.  $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \subset \overset{\circ}{A \cup B}$ .
6.  $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$ .

### Démonstration

1. Supposons  $A \subset B$ . Alors comme  $\overset{\circ}{A} \subset A$ ,  $\overset{\circ}{A} \subset B$ .

Donc  $\overset{\circ}{A}$  est un ouvert de  $E$  inclus dans  $B$ . Or  $\overset{\circ}{B}$  est le plus grand ouvert de  $E$  inclus dans  $B$  donc  $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$ .

2. Supposons  $A \subset B$ . Alors comme  $B \subset \overline{B}$ ,  $A \subset \overline{B}$ .

Donc  $\overline{B}$  est un fermé de  $E$  contenant  $A$ . Or  $\overline{A}$  est le plus petit fermé de  $E$  contenant  $A$  donc  $\overline{A} \subset \overline{B}$ .

3.  $A \cap B \subset A$  et  $A \cap B \subset B$  donc via la première assertion de la proposition,  $\overset{\circ}{A \cap B} \subset \overset{\circ}{A}$  et  $\overset{\circ}{A \cap B} \subset \overset{\circ}{B}$  donc

$$\overset{\circ}{A \cap B} \subset \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$$

D'autre part,  $\overset{\circ}{A} \subset A$  et  $\overset{\circ}{B} \subset B$  donc  $\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B} \subset A \cap B$ .



Donc  $\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$  est un ouvert de  $E$  inclus dans  $A \cap B$ . Or  $\overset{\circ}{A \cap B}$  est le plus grand ouvert inclus dans  $A \cap B$  donc

$$\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B} \subset \overset{\circ}{A \cap B}$$

Ainsi  $\overset{\circ}{A \cap B} = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$ .

4.  $A \subset A \cup B$  et  $B \subset A \cup B$  donc via la deuxième assertion de la proposition,  $\overline{A} \subset \overline{A \cup B}$  et  $\overline{B} \subset \overline{A \cup B}$  donc

$$\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$$

D'autre part,  $A \subset \overline{A}$  et  $B \subset \overline{B}$  donc  $A \cup B \subset \overline{A} \cup \overline{B}$ .

Donc  $\overline{A \cup B}$  est un fermé contenant  $A \cup B$  or  $\overline{A} \cup \overline{B}$  est le plus petit fermé contenant  $A \cup B$  donc

$$\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$$

Ainsi  $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ .

5.  $A \subset A \cup B$  et  $B \subset A \cup B$  donc  $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{A \cup B}$  et  $\overset{\circ}{B} \subset \overset{\circ}{A \cup B}$ .  
Donc  $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \subset \overset{\circ}{A \cup B}$ .

6.  $A \cap B \subset A$  et  $A \cap B \subset B$  donc  $\overline{A \cap B} \subset \overline{A}$  et  $\overline{A \cap B} \subset \overline{B}$ .  
Donc  $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$ .

### Remarque

Les inclusions réciproques des cinquième et sixième assertions de la proposition précédente sont fausses comme l'illustrent les deux exemples ci-dessous.

Soient l'espace vectoriel normé  $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ ,  $A = [-1, 0]$ ,  $B = [0, 1]$ ,  $C = ]-1, 0[$  et  $D = ]0, 1[$ .

Alors  $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} = ]-1, 0[ \cup ]0, 1[$  alors que  $\overset{\circ}{A \cup B} = ]-1, 1[$ .

D'autre part,  $\overline{C} \cap \overline{D} = [-1, 0] \cap [0, 1] = \{0\}$  alors que  $\overline{C \cap D} = \emptyset$ .

### 1.3.6 Point adhérent et limite

#### Proposition 11

Soient  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé,  $A \subset E$  et  $x \in E$ .

Alors  $x \in \overline{A}$  ssi il existe une suite de  $A$  convergent vers  $x$ .

**Démonstration**

Soit  $x \in \overline{A}$ . Alors pour tout voisinage  $V$  de  $x$ ,  $V \cap A \neq \emptyset$ .

En particulier, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $B\left(x, \frac{1}{n}\right) \cap A \neq \emptyset$ .

Ainsi, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , il existe  $a_n \in B\left(x, \frac{1}{n}\right) \cap A$  c'est-à-dire pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $a_n \in A$  et  $\|a_n - x\| < \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

On a donc construit une suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  de  $A$  convergeant vers  $x$ .

Réciproquement, supposons qu'il existe une suite  $(a_n)$  de  $A$  convergeant vers  $x$ . Montrons que  $x \in \overline{A}$ .

Soit  $V$  un voisinage de  $x$ . Alors il existe  $r \in \mathbb{R}_+^*$  tel que  $B(x, r) \subset V$ .

Comme  $(a_n)$  converge vers  $x$ , il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \in \mathbb{N}$

$$n \geq N \implies \|a_n - x\| < r.$$

Donc  $a_N \in B(x, r)$  et  $a_N \in A$  donc  $a_N \in B(x, r) \cap A$ . Or  $B(x, r) \subset V$  donc  $a_N \in V \cap A$  d'où  $V \cap A \neq \emptyset$ .

Ainsi  $x \in \overline{A}$ .

**Théorème 4 (Cantor<sup>35,36</sup> (1884)<sup>37,38</sup>)**

Soient  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé et  $A \subset E$ .

Alors  $A$  est un fermé de  $E$  ssi toute suite de  $A$  convergeant dans  $E$ , converge dans  $A$ .

**Démonstration**

Supposons que  $A$  est un fermé de  $E$ . Alors  $A = \overline{A}$ .

Soit  $(a_n)$  une suite de  $A$  convergeant vers  $x \in E$ . Alors, via la proposition précédente,  $x \in \overline{A}$ . Or  $A = \overline{A}$  donc  $x \in A$ .

35. Ce résultat n'est pas connu sous le nom de théorème de Cantor mais peut être attribué à ce mathématicien (cf. notes 37 et 38).

36. cf. notice biographique p. 369.

37. cf. p. 470 du numéro 6 de son article *Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten*, *Mathematische Annalen*, **23**, pp. 453-488.

38. Les notions de norme et d'espace vectoriel normé ne sont formalisées qu'en 1920 par Banach (cf. note 13 p. 31 et notice biographique p. 83) et la topologie ne prend son essor qu'après la thèse de Fréchet (cf. notice biographique p. 96) de 1906 (cf. *Sur quelques points du calcul fonctionnel*, *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, **22**, pp. 1-74) et l'ouvrage d'Hausdorff de 1914 (cf. *Grundzüge der Mengenlehre*, Veit & Comp., Leipzig et notice biographique p. 72). Néanmoins Cantor, près de 30 ans auparavant, définit déjà la notion fondamentale de fermé et montre son importance avec ce résultat.

# Index

## A

- Abel, 426, 433, 437, 636
  - lemme d'—, 472
  - notice biographique, 186
  - règle d'— pour les intégrales impropres, 289
  - règle d'— pour les séries numériques, 185
  - théorème dû à — et Dini, 228
  - théorèmes d'—, 472, 515
  - théorèmes dus à —, 185, 197, 289
  - transformation d'—, 187
- absolue
  - convergence — d'une intégrale impropre, 275
  - convergence — d'une série de fonctions, 428
  - convergence — d'une série numérique, 180
- adhérence
  - définition, 55
  - valeur d'—, 90, 511
- adhérent (point —), 55, 59, 61
- Alembert (d'), 207, 416
  - notice biographique, 164
  - règle de — pour les séries entières, 479
  - règle de — pour les séries numériques, 162
  - théorème de d'— -Gauss, 522
  - théorèmes dus à —, 162, 479
- alternée(s)
  - critère spécial des séries —, 177
  - série —, 176
- Apéry, 199
- arc
  - continue, 101
  - de classe  $C^k$ , 555
  - dérivée le long d'un —, 582
  - extrémité d'un —, 101

- origine d'un —, 101
- paramétré du plan, 555
- astroïde, 562
- asymptote, 567
  - horizontale, 567
  - oblique, 567
  - verticale, 567

## B

- Baire, 427
  - notice biographique, 426
- Banach, 30, 60, 120
  - espace de —, 120
  - notice biographique, 83
  - théorème du point fixe de —, 124
  - théorème dû à, 82
- base
  - duale, 591
  - orthonormée d'un espace euclidien, 598
- Bernoulli (Daniel), 203
- Bernoulli (Johann), 178, 203
- Bernoulli (lemniscate de —), 570
- Bernstein, 350, 401
  - lemme de —, 391
  - notice biographique, 391
  - polynômes de —, 350, 386
  - théorème de —, 391
- Bertrand, 214, 231
  - fonctions de —, 271
  - fonctions de — généralisées, 283
  - intégrales de —, 272
  - intégrales de — généralisées, 283
  - notice biographique, 159

- séries de —, 158
  - séries de — généralisées, 214–220
  - théorèmes dus à —, 159, 272
  - Bessel, 366
    - inégalité de —, 669
    - notice biographique, 669
  - bêta (fonction — d'Euler), 312
  - Bézier, 373
    - courbe de —, 351, 387
    - courbe de — cubique, 388
    - courbe de — linéaire, 387
    - courbe de — quadratique, 387
    - cubique de —, 351, 388
    - notice biographique, 388
  - Bézout, 656
  - bilinéaire (forme —), 24
  - Bois-Reymond (du), 235, 674
    - notice biographique, 681
    - théorème dû à —, 680
  - Boltzmann, 211
  - Bolzano, 95, 446
    - théorème de — -Weierstrass, 112
  - Bonnet, 214
  - bornée (partie — d'un espace vectoriel normé), 42
  - boule
    - fermée, 41
    - ouverte, 41
  - Bouniakowsky, 28
    - inégalité de —, 28
  - branche
    - infinie, 566
    - parabolique, 567
- C
- Cantor, 29, 49, 51, 72, 233, 235, 368, 526, 670
    - notice biographique, 369
    - théorème dû à —, 60
  - Carathéodory, 49, 701
  - Carleman
    - notice biographique, 211
    - théorème dû à —, 211
  - Catalan, 167
  - Cauchy, 120, 153, 186, 433, 495, 527, 593, 623, 636
    - critère intégral de —, 267
    - critère de — pour les fonctions, 123
    - critère de — pour les intégrales impropres, 287
    - inégalité de — -Schwarz, 28
    - lemme de condensation de —, 150
    - lemme de l'escalier de —, 169
    - notice biographique, 151
    - produit de — de séries entières, 484
    - produit de — de séries numériques, 188
    - règle de — pour les séries entières, 480
    - règle de — pour les séries numériques, 165
    - suite de —, 118
    - théorème de —, 521
    - théorèmes dus à —, 150, 165, 169, 170, 189, 267, 480, 484
  - Cauchy-Schwarz (inégalité de —), 28
  - Cesàro, 114, 674
    - convergence en moyenne de —, 699
    - notice biographique, 167
    - théorème de —, 166
  - changement de variable
    - dans les intégrales impropres, 270
  - Chebyshev, 159
  - chemin, 101
  - Clairaut (théorème de —), 622
  - classe
    - de —  $C^1$ , 611
    - de —  $C^1$  par morceaux, 685
    - de —  $C^k$ , 621
    - de —  $C^\infty$ , 621
  - Clifford, 78
  - coefficients (de Fourier), 655, 661
  - compact, 91
  - comparaison
    - critère de — logarithmique, 161
    - critères de — pour les intégrales impropres, 265
    - critères de — pour les séries entières, 486
    - critères de — pour les séries numériques, 154
    - des règles de Cauchy et de d'Alembert, 166–172
    - intégration des relations de —, 278–283
    - sommation des relations de —, 182–185
  - complet, 120
  - condensation (lemme de — de Cauchy), 150
  - connexe par arcs, 102
  - constante (d'Euler), 156
  - continue
    - définition, 69
    - par morceaux, 652
    - uniformément —, 75
  - contractante, 77
  - convergence
    - absolue d'une intégrale impropre, 275
    - absolue d'une série de fonctions, 428
    - absolue d'une série numérique, 180
    - d'une série numérique, 143
    - d'une suite dans un espace vectoriel normé, 38

- disque ouvert de —, 475  
 en moyenne de Cesàro, 699  
 en moyenne quadratique, 674  
 normale d'une série de fonctions, 427  
 norme de la — en moyenne, 33  
 norme de la — en moyenne quadratique, 33  
 semi- — d'une série numérique, 181  
 simple d'une série de fonctions, 421  
 simple d'une suite de fonctions, 352  
 théorème de — dominée de Lebesgue, 441  
 uniforme d'une série de fonctions, 422  
 uniforme d'une suite de fonctions, 356
- convexe, 103, 615
- corde(s)
- équation des — vibrantes, 416
  - problème des — vibrantes, 416
  - vibration d'une — de guitare, 416–419
- courbe
- de Bézier, 351, 387
    - cubique, 388
    - linéaire, 387
    - quadratique, 387
  - de Lissajous, 557
  - de niveau, 603
  - paramétrée, 555
- Crelle, 186
- critère(s)
- d'Abel pour les intégrales impropres, 289
  - d'Abel pour les séries numériques, 185
  - d'Ermakoff, 291
  - de Cauchy
    - pour les fonctions, 123
    - pour les intégrales impropres, 287
  - de comparaison
    - pour les intégrales impropres, 265
    - pour les séries entières, 486
    - pour les séries numériques, 154
  - de comparaison logarithmique, 161
  - de d'Alembert pour les séries entières, 479
  - de d'Alembert pour les séries numériques, 162
  - de Duhamel, 174
  - de Gauss, 205
  - de Kummer, 236
  - de Leibniz, 177
  - de Raabe, 172
  - de Riemann, 156
  - de Riemann généralisé, 157
  - de Weierstrass, 427
  - intégral de Cauchy, 267
  - spécial des séries alternées, 177
- cubique (de Bézier), 351, 388
- ## D
- Dedekind, 72, 369
- notice biographique, 51
  - théorème dû à —, 50
- définie
- forme bilinéaire symétrique — positive, 26
  - forme sesquilinéaire hermitienne — positive, 662
- dense, 61
- densité
- de  $\mathbb{Q}$  dans  $\mathbb{R}$ , 62
  - définition, 61
- dérivée
- directionnelle, 583
  - le long d'un arc, 582
  - partielle (première), 585
  - partielle d'ordre  $k$ , 619
  - partielle seconde, 619
  - selon un vecteur, 583
- Descartes (folium de —), 568
- développable (fonction — en série entière), 493
- Diderot, 164
- différentiable, 573, 576
- différentielle
- d'une application bilinéaire, 577
  - d'une application linéaire, 577
  - définition, 574, 576
- Dini, 214, 299
- notice biographique, 231
  - théorème dû à —, 230
  - théorème dû à Abel et —, 228
  - théorème dû à Kummer et —, 234
  - théorèmes de —, 381, 383
- Dirichlet (Lejeune- —), 51, 78, 153, 199, 233, 235, 366, 656
- condition de —, 664
  - espace de —, 664
  - intégrales de —, 316–322
  - notice biographique, 317
  - noyau de —, 690
  - théorème de —, 690
  - théorème dû à —, 317
- disque
- de convergence, 476
  - fermé, 471
  - ouvert, 471
- distance
- associée à une norme, 37

d'un vecteur à un sous-espace, 38  
 définition, 36  
 dominée (théorème de convergence —), 441  
 Du Bois-Reymond, 235, 674  
   notice biographique, 681  
   théorème dû à —, 680  
 dual (d'un espace vectoriel), 591  
 Duhamel, 159  
   notice biographique, 175  
   règle de —, 174  
   règle de Raabe et — généralisée, 220–224  
   règle de Raabe- —, 174

## E

égalité (de Parseval), 676  
 Einstein, 116  
 Ermakoff (théorème dû à —), 291  
 espace  
   compact, 91  
   complet, 120  
   de Banach, 120  
   de Hilbert, 120  
   euclidien, 27  
   métrique, 36  
   préhilbertien complexe, 662  
   préhilbertien réel, 27  
   vectoriel normé, 31  
   vectoriel normé produit, 38  
 étoilée  
   par rapport à un point, 103  
   partie —, 103  
 euclidien  
   base orthonormée d'un espace —, 598  
   espace —, 27  
 Euler, 152, 173, 186, 199, 594, 636  
   constante d'—, 156  
   fonction  $\Gamma$  d'—, 311  
   fonction  $B$  d'—, 312  
   intégrales d'—, 311–315  
   notice biographique, 203  
   théorèmes dus à —, 202, 315  
 exponentielle (fonction — complexe), 505  
 extractrice, 89  
 extraite (suite —), 89  
 extremum  
   global, 609  
   local, 608

## F

Fejér, 674, 683, 704  
   notice biographique, 701  
   noyau de —, 700  
   théorèmes de —, 701, 704  
 Fermat, 235, 317  
 fermé(e)  
   boule —, 41  
   disque —, 471  
   ensemble —, 49  
 folium (de Descartes), 568  
 fonction(s)  
    $B$  d'Euler, 312  
    $\Gamma$  d'Euler, 311  
   de Bertrand, 271  
   de Bertrand généralisées, 283  
   de Riemann, 262  
   développable en série entière, 493  
   différentiable, 573, 576  
   différentielle d'une —, 574, 576  
   exponentielle complexe, 505  
   intégrable, 275  
 forme  
   bilinéaire, 24  
   bilinéaire symétrique, 26  
   bilinéaire symétrique définie positive, 26  
   bilinéaire symétrique positive, 26  
   linéaire, 591  
   sesquilinéaire hermitienne, 662  
   sesquilinéaire, 662  
   sesquilinéaire hermitienne définie positive, 662  
   sesquilinéaire hermitienne positive, 662  
 Fourier, 78, 231, 317, 594, 657, 681, 701  
   coefficients de —, 655, 661  
   notice biographique, 656  
   série de —, 655  
 Fréchet, 36, 60, 72, 91, 100, 102, 120, 508, 573, 599  
   notice biographique, 96  
   théorème dû à —, 95  
 Fresnel  
   intégrales de —, 325–334  
   notice biographique, 326  
   théorème dû à —, 325  
 frontière, 55  
 Fubini  
   notice biographique, 299  
   théorèmes de —, 297, 306, 308

## G

- Galois, 233, 636  
 gamma (fonction — d'Euler), 311  
 Gauss, 51, 100, 164, 186, 317  
   intégrale de —, 322–325  
   loi de —, 252  
   notice biographique, 207  
   règle de —, 205  
   théorème de —, 322  
   théorème de d'Alembert- —, 522  
   théorème dû à, 205  
 géométrique (série), 140, 144  
 gradient  
   définition, 601  
   propriétés du —, 603–607  
 Gudermann, 356  
 Gutzmer  
   notice biographique, 526  
   théorème dû à —, 525

## H

- Hadamard, 401  
   notice biographique, 508  
   produit de —, 507  
   théorème de —, 513  
   théorème dû à —, 507  
 Hahn, 30  
 Halley (comète de —), 669  
 Hardy (notation de —), 216  
 harmonique (série —), 140, 147–148  
 Hausdorff, 36, 47, 49, 60, 120  
   notice biographique, 72  
   théorèmes dus à —, 50, 71, 73  
 Heine, 75, 373  
   notice biographique, 100  
   théorème de, 100  
   théorèmes dus à —, 371, 435  
 Helly, 30  
 Hermite, 231  
 hermitienne (forme sesquilinéaire —), 662  
 Hesse, 627  
 hessienne (matrice —), 627  
 Hettner, 373  
 Hilbert, 28, 195, 369, 391  
   espace de —, 120  
   notice biographique, 121  
 Hölder  
   inégalité de, 113

- notice biographique, 114, 600  
 Holmboe, 186, 433  
 homéomorphe, 98  
 homéomorphisme, 98  
 Hurwitz, 373

## I

- inégalité  
   de Bessel, 669  
   de Bouniakowsky, 28  
   de Cauchy-Schwarz, 28  
   de Hölder, 113  
   de Minkowski, 30, 115  
   de Wirtinger, 679  
   des accroissements finis, 553, 618  
   triangulaire, 31, 35, 36, 551  
 intégrable (fonction —), 275  
 intégrale(s)  
   d'Euler, 311–315  
   d'une fonction vectorielle, 547  
   de Bertrand, 272  
   de Bertrand généralisées, 283  
   de Dirichlet, 316–322  
   de Fresnel, 325–334  
   de Gauss, 322–325  
   de Lejeune-Dirichlet, 316–322  
   définie dépendant d'un paramètre, 293–300  
   eulériennes, 311–315  
   impropre dépendant d'un paramètre, 300–311  
   théorèmes de Fubini sur les — doubles, 297, 306, 308  
 intégration  
   des relations de comparaison, 278–283  
   par parties dans les intégrales impropres, 269  
 intérieur, 55  
   point —, 55

## J

- Jacobi, 366  
   notice biographique, 594  
 jacobien, 593  
 jacobienne (matrice —), 593

## K

- Kantorovich  
   notice biographique, 401

théorème dû à —, 401  
 Koch (von), 211  
 Kolmogorov, 391, 401  
 Kronecker, 100, 114, 193, 233, 235, 526  
   notice biographique, 233  
   théorème dû à —, 232  
 Kummer, 100, 114, 193, 623  
   notice biographique, 235  
   règle de —, 236  
   théorème dû à — et Dini, 234

## L

Lagrange, 151, 186, 468, 594, 656  
   notice biographique, 636  
   théorème dû à —, 632  
 Landau, 701  
 Laplace, 151, 186  
   théorème de — -Gauss, 322  
 Lebesgue, 83, 600  
   lemmes de Riemann- —, 670, 691  
   notice biographique, 442  
   théorème de convergence dominée de —, 441  
   théorèmes de Riemann- —, 670, 691  
 Leibniz  
   notice biographique, 178  
   règle de —, 177  
   théorème dû à —, 295  
 Lejeune-Dirichlet, 51, 78, 153, 199, 233, 235, 285, 366, 656  
   condition de —, 664  
   espace de —, 664  
   intégrales de —, 316–322  
   notice biographique, 317  
   noyau de —, 690  
   théorème de —, 690  
   théorème dû à —, 317  
 lemme(s)  
   d'Abel, 472  
   de Bernstein, 391  
   de condensation de Cauchy, 150  
   de l'escalier de Cauchy, 169  
   de Riemann-Lebesgue, 670, 691  
 lemniscate (de Bernoulli), 570  
 limite supérieure, 510  
 Liouville  
   notice biographique, 528  
   théorème de —, 527  
 Lipschitz, 77, 114  
   notice biographique, 78

lipschitzienne, 77  
 Lissajous (courbe de —), 557

## M

matrice  
   hessienne, 627  
   jacobienne, 593  
 maximum  
   global, 609  
   local, 608  
 Mertens  
   notice biographique, 193  
   théorème de —, 192  
 métrique (espace —), 36  
 minimum  
   global, 609  
   local, 608  
 Minkowski, 600  
   inégalité de —, 30, 115  
   notice biographique, 116  
 Mittag-Leffler, 211  
 Monge, 656  
   notations de —, 631  
 Montel, 401  
 morceaux  
   continue par —, 652  
   de classe  $C^1$  par —, 685  
 Morgan (de), 214  
 moyenne  
   convergence en — de Cesàro, 699  
   convergence en — quadratique, 674  
   norme de la convergence en —, 33  
   norme de la convergence en — quadratique, 33  
 multilinéaire (application —), 87

## N

Neumann (von), 120  
   notice biographique, 29  
   théorèmes dus à —, 28, 30  
 Newton, 178  
 Nikodym, 83  
 normale (convergence — d'une série de fonctions), 427  
 normé  
   espace vectoriel —, 31  
   espace vectoriel — produit, 38  
 norme(s)  
   associée à un produit scalaire, 35



de la convergence en moyenne, 33  
 de la convergence en moyenne quadratique, 33  
 de la convergence uniforme, 33  
 définition, 31  
 équivalentes, 42  
 euclidienne, 32

noyau

de Dirichlet, 690  
 de Fejér, 700  
 de Lejeune-Dirichlet, 690

## O

Olivier (théorème dû à —), 224  
 Oresme, 147, 152  
 orthogonal (projecteur —), 667  
 ouvert(e)  
   boule —, 41  
   disque —, 471  
   disque — de convergence, 475  
   ensemble —, 49

## P

paradoxe de Zénon, 139, 252  
 Parseval, 199, 676  
   égalité de —, 676  
   théorème de —, 676  
 Picard, 527  
 plan (tangent), 607  
 point  
   adhérent, 55, 59, 61  
   col, 632  
   critique, 608  
   d'inflexion, 561  
   de rebroussement de deuxième espèce, 561  
   de rebroussement de première espèce, 561  
   intérieur, 55  
   ordinaire, 561  
   régulier, 557  
   selle, 632  
   singulier, 557  
   stationnaire, 557  
   théorème du — fixe de Banach, 124  
 Poisson, 594, 657, 676  
 Pólya, 381  
 polynôme(s)  
   de Bernstein, 350, 386  
   trigonométrique, 394, 668

positive

forme bilinéaire symétrique —, 26  
 forme bilinéaire symétrique définie —, 26  
 forme sesquilinéaire hermitienne —, 662  
 forme sesquilinéaire hermitienne définie —, 662

préhilbertien

espace — complexe, 662  
 espace — réel, 27

primitive (d'une fonction vectorielle), 551

Pringsheim

notice biographique, 227  
 théorème dû à —, 226

produit

d'espaces vectoriels normés, 38  
 de Cauchy de séries entières, 484  
 de Cauchy de séries numériques, 188  
 de Hadamard, 507  
 scalaire sur un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel, 662  
 scalaire sur un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, 26  
 projecteur (orthogonal), 667

## Q

quadratique

convergence en moyenne —, 674  
 norme de la convergence en moyenne —, 33

## R

Raabe

notice biographique, 173  
 règle de —, 172  
 règle de — -Duhamel, 174  
 règle de — et Duhamel généralisée, 220–224

Rademacher, 195

rayon de convergence, 473

règle(s)

d'Abel pour les intégrales impropres, 289  
 d'Abel pour les séries numériques, 185  
 de Cauchy pour les séries entières, 480  
 de Cauchy pour les séries numériques, 165  
 de d'Alembert pour les séries entières, 479  
 de d'Alembert pour les séries numériques, 162  
 de Duhamel, 174  
 de Gauss, 205  
 de Kummer, 236  
 de Leibniz, 177  
 de Raabe, 172  
 de Raabe et Duhamel généralisée, 220–224

de Raabe-Duhamel, 174  
 de Riemann, 156  
 de Riemann généralisée, 157  
 régularisée (d'une fonction), 664  
 reste (d'une série), 145, 421  
 Riemann, 51, 78  
   fonctions de —, 262  
   lemmes de — -Lebesgue, 670, 691  
   notice biographique, 153  
   règle de —, 156  
   règle de — généralisée, 157  
   séries de —, 152  
   somme de —, 549  
   théorèmes de — -Lebesgue, 670, 691  
 Riesz, 30, 120  
   notice biographique, 600  
   théorèmes de —, 129, 599

## S

Schlömilch  
   notice biographique, 208  
   théorème dû à —, 208  
 Schmidt, 701  
 Schrödinger, 193, 211  
 Schwarz, 235, 373, 434, 526, 701  
   inégalité de Cauchy- —, 28  
   notice biographique, 623  
   théorème de —, 622  
 Seidel, 434  
   notice biographique, 366  
   théorèmes dus à —, 365, 432  
 série(s)  
   à termes positifs, 148  
   alternée, 176  
   critères de comparaison, 154, 486  
   de Bertrand, 158  
   de Bertrand généralisées, 214–220  
   de Riemann, 152  
   de Taylor, 494  
   définition, 143, 420  
   dérivée d'une série entière, 487  
   géométrique, 140, 144  
   harmonique, 140, 147–148  
   primitive d'une série entière, 488  
   reste d'une — numérique, 145  
   somme d'une — numérique, 145  
   trigonométrique, 651  
 sesquilineaire (forme —), 662  
 simple

convergence — d'une série de fonctions, 421  
 convergence — d'une suite de fonctions, 352  
 sommation (des relations de comparaison), 182–185  
 somme(s)  
   d'une série, 145, 421  
   de Riemann, 549  
   exemples de calculs de — de séries, 199–205  
   partielles d'une série, 143, 420  
 sphère, 41  
 Steinhaus, 83  
 Stolz, 297  
 subdivision, 549, 652  
   régulière, 549  
 suite  
   de Cauchy, 118  
   extraite, 89  
 supérieure (limite —), 510  
 support (d'un arc paramétré), 555  
 symétrique (forme bilinéaire —), 26  
 Szegő, 381

## T

tangent  
   plan —, 607  
   vecteur —, 605  
 Tarski, 83  
 Tauber  
   notice biographique, 519  
   théorème de —, 518  
 Taylor, 468  
   formule de —, 468  
   séries de —, 469, 494  
   théorèmes de — -Young, 554, 627, 628  
 Tchebychev, 159  
 théorème(s)  
   d'Abel, 472, 515  
   d'intégration terme à terme, 437  
   de Banach, 124  
   de Bernstein, 391  
   de Bessel, 669  
   de Bolzano-Weierstrass, 112  
   de Cauchy, 521  
   de Cauchy-Schwarz, 28  
   de Cesàro, 166  
   de Clairaut, 622  
   de condensation de Cauchy, 150  
   de convergence dominée de Lebesgue, 441  
   de d'Alembert-Gauss, 522  
   de Dini, 381, 383

- de Dirichlet, 690  
 de Duhamel, 174  
 de Fejér, 701, 704  
 de Fubini, 297, 306, 308  
 de Gauss, 322  
 de Hadamard, 513  
 de Heine, 100  
 de Hölder, 113  
 de Laplace-Gauss, 322  
 de Lebesgue, 441  
 de Leibniz, 177  
 de Lejeune-Dirichlet, 690  
 de Liouville, 527  
 de Mertens, 192  
 de Minkowski, 30, 115  
 de Parseval, 676  
 de Raabe, 172  
 de représentation de Riesz, 599  
 de Riemann-Lebesgue, 670, 691  
 de Riesz, 129, 599  
 de Schwarz, 622  
 de Tauber, 518  
 de Taylor-Young, 554, 627, 628  
 de Tychonoff, 98  
 de Weierstrass, 389, 395  
 de Wirtinger, 679  
 des accroissements finis, 617  
 du point fixe de Banach, 124  
 dû à Abel et Dini, 228  
 dû à Banach, 82  
 dû à Cantor, 60  
 dû à Carleman, 211  
 dû à Dedekind, 50  
 dû à Dini, 230  
 dû à Dirichlet, 317  
 dû à Du Bois-Reymond, 680  
 dû à Ermakoff, 291  
 dû à Fréchet, 95  
 dû à Fresnel, 325  
 dû à Gutzmer, 525  
 dû à Hadamard, 507  
 dû à Kantorovich, 401  
 dû à Kronecker, 232  
 dû à Kummer, 236  
 dû à Kummer et Dini, 234  
 dû à Lagrange, 632  
 dû à Leibniz, 295  
 dû à Lejeune-Dirichlet, 317  
 dû à Olivier, 224  
 dû à Pringsheim, 226  
 dû à Schlömilch, 208  
 dû à Toeplitz, 193  
 dus à Abel, 185, 197, 289  
 dus à Bertrand, 159, 272  
 dus à Cauchy, 150, 165, 169, 170, 189, 267, 480, 484  
 dus à d'Alembert, 162, 479  
 dus à Euler, 202, 315  
 dus à Hausdorff, 50, 71, 73  
 dus à Heine, 371, 435  
 dus à Seidel, 365, 432  
 dus à von Neumann, 28, 30  
 dus à Weierstrass, 372, 427, 436, 446  
 fondamental de l'algèbre, 522  
 fondamental de l'analyse, 552
- Toeplitz  
 notice biographique, 195  
 théorème dû à —, 193
- trajectoire (d'un arc paramétré), 555  
 transformation d'Abel, 187  
 trigonométrique (polynôme —), 394, 668
- Tychonoff  
 notice biographique, 99  
 théorème de —, 98
- ## U
- uniforme  
 continuité —, 75  
 convergence — d'une série de fonctions, 422  
 convergence — d'une suite de fonctions, 356  
 norme de la convergence —, 33
- ## V
- valeur d'adhérence, 90, 511  
 vecteur (tangent), 605  
 voisinage, 47  
 Von Neumann, 120  
 notice biographique, 29  
 théorèmes dus à —, 28, 30
- ## W
- Weierstrass, 100, 114, 193, 227, 233, 235, 391, 426, 427, 434, 526, 623, 704  
 critère de —, 427  
 notice biographique, 373  
 théorème de Bolzano- —, 112

théorèmes de —, 389, 395

théorèmes dus à —, 372, 427, 436, 446

Wiener, 30

Wirtinger

inégalité de —, 679

notice biographique, 679

théorème de —, 679

## Y

Young

notice biographique, 629

théorèmes de Taylor- —, 554, 627, 628

## Z

Zénon (paradoxe de —), 139, 252



# Cet ouvrage développe le programme d'analyse de deuxième année des classes préparatoires scientifiques, de façon originale, approfondie et fidèle.

- Le texte, rigoureux et pédagogique, permet à tous les étudiants de suivre pas à pas les démonstrations. De nombreuses figures facilitent la compréhension et l'assimilation des notions abordées.
- Des exercices, dont les corrigés sont très détaillés, permettent de vérifier l'acquisition des points clés de chaque chapitre.
- L'auteur a pris soin de replacer les résultats présentés dans leur contexte historique : les théorèmes sont datés, leurs sources précises indiquées et des notices biographiques évoquent les faits marquants de la vie des mathématiciens cités.
- Dans les parties « compléments », l'ouvrage aborde des théorèmes plus difficiles ou moins connus, destinés aux lecteurs souhaitant un approfondissement des sujets classiques.

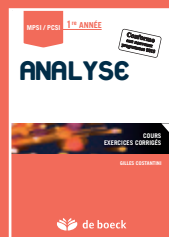
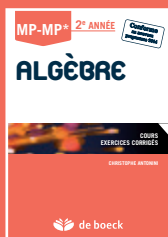
L'ouvrage intéressera également les candidats au CAPES et à l'agrégation.



LES  
+

- + Conforme au nouveau programme 2014
- + De nombreux exercices corrigés
- + Texte abondamment illustré pour faciliter la compréhension
- + Tout en couleurs

Olivier Rodot est responsable du département mathématiques des classes préparatoires de l'EPITA.



< Dans la même collection dirigée par Olivier Rodot

ISBN : 978-2-8041-8810-8



PREANA2

[www.deboeck.com](http://www.deboeck.com)