François Cottet-Emard

36 problèmes corrigés pour le CAPES de mathématiques

maths

PROBLÈMES CORRIGÉS

LMD

L2 et CAPES de mathématiques

de boeck
supérieur

36 problèmes corrigés
pour le CAPES
de mathématiques

Licence Maîtrise Doctorat

Maths

ASLANGUL C., *Des mathématiques pour les sciences. Concepts, méthodes et techniques pour la modélisation*
ASLANGUL C., *Des mathématiques pour les sciences 2. Corrigés détaillés et commentés des exercices et problèmes*
BOGAERT P., *Probabilités pour scientifiques et ingénieurs. Introduction au calcul des probabilités*
COTTET-EMARD F., *Algèbre linéaire et bilinéaire*
COTTET-EMARD F., *Analyse*
COTTET-EMARD F., *Analyse 2. Calcul différentiel, intégrales multiples, séries de Fourier*
COTTET-EMARD F., *Calcul différentiel et intégral. Exercices et problèmes corrigés*
COTTET-EMARD F., *Probabilités et tests d'hypothèses*
DUPONT P., *Exercices corrigés de mathématiques. Algèbre et géométrie*. 3e éd.
DUPONT P., *Exercices corrigés de mathématiques. Analyse*. 3e éd.
ETIENNE D., *Exercices corrigés d'algèbre linéaire. Tome 1*
ETIENNE D., *Exercices corrigés d'algèbre linéaire. Tome 2*
MARCHAND M., *Outils mathématiques pour l'informaticien. Mathématiques discrètes*. 2e éd.

Physique

ASLANGUL C., *Mécanique quantique 1. Fondements et premières applications*
ASLANGUL C., *Mécanique quantique 2. Développements et applications à basse énergie*. 2e éd.
ASLANGUL C., *Mécanique quantique 3. Corrigés détaillés et commentés des exercices et problèmes*. 2e éd.
BECHERRAWY T., *Optique géométrique*
BIÉMONT É., *Spectroscopie atomique. Instrumentation et structures atomiques*
BIÉMONT É., *Spectroscopie moléculaire. Structures moléculaires et analyse spectrale*
CHAMPEAU R.-J., CARPENTIER R., LORGERÉ I., *Ondes lumineuses. Propagation, optique de Fourier, cohérence*
MAYET F., *Physique nucléaire appliquée*
RIEUTORD M., *Une introduction à la dynamique des fluides*
TAILLET R., *Optique physique. Propagation de la lumière*. 2e éd.
WATSKY A., *Thermodynamique macroscopique*

François Cottet-Emard

36 problèmes corrigés pour le CAPES de mathématiques

maths

PROBLÈMES CORRIGÉS

de boeck supérieur

Pour toute information sur notre fonds et les nouveautés dans votre domaine de spécialisation, consultez notre site web : **www.deboecksuperieur.com**

Fond Jean Pâques, 4, B-1348 Louvain-la-Neuve

Imprimé aux Pays-Bas

Dépôt légal : 1re édition
Bibliothèque nationale, Paris : janvier 2016 1er tirage
Bibliothèque royale de Belgique, Bruxelles : 2016/13647/076

Avant-propos

Cet ouvrage regroupe trente-six problèmes de mathématiques, de niveau fin de L2 ou Classes Préparatoires aux Grandes Écoles, et est destiné aux élèves des CPGE et aux étudiants préparant le CAPES de mathématiques. Depuis quelques années, la majorité des épreuves écrites de ces concours a changé de forme et de philosophie. Les immenses problèmes dits à tiroirs laissent la place à une épreuve formée de deux problèmes distincts ou bien à un problème dont les parties sont largement indépendantes.

J'ai rédigé les énoncés dans cette optique, soit avec un unique et long problème à multiples parties plus ou moins indépendantes, soit avec un problème court correspondant à une moitié d'une épreuve de quatre ou cinq heures formée de deux sujets distincts. Les connaissances demandées sont strictement celles des L2-CPGE, et en aucun cas des notions de l'année L3 de licence de mathématiques. C'est particulièrement le cas des théorèmes de continuité et de dérivation d'une intégrale dépendant d'un paramètre.

Par ailleurs, les énoncés actuels sont plus détaillés, et les questions sont plus nombreuses qu'auparavant, détaillant mieux les démarches à suivre. Cela ne veut pas dire que les épreuves sont plus simples *a priori*, mais que l'évaluation change. Si un candidat ne sait pas faire une question bien dirigée et courte, la sanction est immédiate et claire. Dans le cas d'une question difficile, sans démarche indiquée, et longue, le correcteur avait plus de loisir de prendre en compte quelques idées constructives, même inachevées.

L'ouvrage contient douze sujets d'algèbre, seize d'analyse, quatre de probabilités et quatre de géométrie. Ces quatre derniers sont plutôt destinés à la préparation au CAPES. La table des matières indique, pour chaque problème, les mots-clés caractérisant le sujet et les méthodes de résolution. Ceci permet de savoir *a priori* dans quel domaine on s'engage, en regardant le problème. L'ordre des problèmes n'a rien à voir avec la difficulté du sujet, et chacun est suivi d'un corrigé détaillé. Deux des sujets de probabilité sont en fait de l'analyse appliquée à des lois sophistiquées comme la loi de Student, mais il est totalement inutile de savoir comment et quand sont utilisées ces lois dans des tests statistiques compliqués. Les deux autres sont des dénombrements ou des probabilités classiques. Tous les problèmes sont indépendants les uns des autres.

J'ai conçu ces différents sujets dans les quatre dernières années, à l'occasion des cours que j'ai donné à la faculté des sciences d'Orsay en L2 et dans la préparation au CAPES, où nombre de sujets donnés en entraînement aux étudiants viennent des concours des grandes écoles, *grosso modo* jusqu'au niveau de l'Ecole Centrale.

Je dédie ce livre à Alice, Audrey, Émilie et tous les autres qui ont testé une partie de ces sujets au cours de leurs études avec moi à Orsay. Plusieurs de ces problèmes ont été écrits au Château de Courcelles, en Picardie, dans le calme et la splendeur de ses appartements qui m'ont inspiré, et je lui dédie aussi mon ouvrage.

Courcelles-sur-Vesle, Novembre 2015

maths

Table des matières

maths

Chapitre 1

Algèbre et arithmétique

1. Nombres algébriques réels

Notations et rappels

Définition. Un nombre réel α est appelé nombre algébrique quand il existe un polyôme non nul P à coefficients rationnels tel que $P(\alpha) = 0$. On va étudier l'ensemble A des nombres algébriques, qui est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.

On rappelle que $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel de dimension infinie sur $\mathbb{Q}$: chaque fois que l'on parle de l'espace vectoriel $\mathbb{R}$ et de sous-espace vectoriel, il s'agit cette structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$. On ne cherchera pas à expliciter une base de cet espace vectoriel.

Ensemble dénombrable. Un ensemble est dit infini quand il ne contient pas un nombre fini d'éléments.

On rappelle qu'un ensemble infini E est dénombrable quand il existe une bijection de $\mathbb{N}$ sur E. Cela signifie que l'on peut numéroter les éléments de E avec les entiers naturels, sous la forme $e_1, e_2, \cdots, e_n, \cdots$

Hormis $\mathbb{N}$ lui-même, on admettra que $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}^p$ et $\mathbb{Q}^p$ ($p \geq 1$ entier naturel) sont dénombrables. On rappelle aussi que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

On admettra aussi les deux conditions nécessaires et suffisantes suivantes, permettant de montrer qu'un ensemble infini E est dénombrable :

- E est dénombrable si et seulement si il existe un ensemble D dont on sait a priori qu'il est dénombrable, et une injection de E dans D.
- E est dénombrable si et seulement si il existe un ensemble D dont on sait a priori qu'il est dénombrable, et une surjection de D sur E.

Pour utiliser l'une ou l'autre de ces conditions, on pourra prendre pour D soit $\mathbb{N}$, soit $\mathbb{N}^p$, soit $\mathbb{Z}$, soit $\mathbb{Q}^p$ comme rappelé.

On admettra aussi le théorème suivant, facile à démontrer :
Soit $E_1, E_2, \cdots, E_n, \cdots$ une famille dénombrable d'ensembles, chaque ensemble étant fini ou dénombrable. Alors la réunion $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ est encore un ensemble dénombrable.

Structures algébriques. On rappelle qu'un groupe additif est un ensemble G muni d'une addition commutative et associative, possédant un élément neutre 0 tel que $0 + x = x$ pour tout $x \in G$, et que tout élément $x \in G$ admet un opposé noté $-x$ vérifiant $x + (-x) = 0$. $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{Q}[X]$ (les polynômes à coefficients rationnels) sont des groupes additifs.

Pour montrer que'une partie non vide H de G est un sous-groupe additif, il suffit de montrer que pour tous $x, y \in H$, alors la différence $x - y$ est encore dans H.

Un anneau commutatif unitaire E est un ensemble muni de deux opérations «+» et «.» (la multiplication). L'addition donne à E une structure de groupe additif. La multiplication est commutative, associative, vérifie $1.x = x$ pour tout $x \in E$, et $x.(y + z) = x.y + x.z$ pour tous $x, y, z \in E$ (distributivité). $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{Q}[X]$ (les polynômes à coefficients rationnels) sont des anneaux commutatifs unitaires.

Pour montrer qu'une partie non vide H d'un anneau E est un sous-anneau unitaire de E, il suffit de montrer que $1 \in H$, et que pour tous $x, y \in H$ la différence $x - y$ et le produit $x.y$ sont encore dans H.

Corps commutatif. Un corps commutatif est un anneau commutatif unitaire dans lequel tout élément non nul x admet un inverse pour la multiplication, à savoir un élément x^{-1} (noté souvent $\frac{1}{x}$) tel que $x.x^{-1} = 1$. $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ sont des corps commutatifs.

Polynôme unitaire. Un polynôme de degré $n \geq 0$ est dit unitaire quand le coefficient de X^n est égal à 1.

Partie A

▶ **A.1.a** Montrer que tout rationnel est un nombre algébrique.

▶ **A.1.b** Donner un exemple de nombre irrationnel très simple, et qui est un nombre algébrique.

▶ **A.2** Montrer que $x = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ est un nombre algébrique.

▶ **A.3** Montrer qu'un réel α est algébrique si et seulement si il existe un polynôme Q à coefficients dans $\mathbb{Z}$ tel que $Q(\alpha) = 0$.

▶ **A.4** Montrer que si $\alpha \in A$, alors pour tout rationnel λ le nombre $\lambda\alpha$ est encore algébrique.

▶ **A.5** Montrer que si α est algébrique, alors pour tout rationnel λ, le nombre $\alpha + \lambda$ est algébrique.

Partie B

Soit $\alpha \notin \mathbb{Q}$ un nombre algébrique fixé. En particulier, α est non nul. On note H_α l'ensemble des polynômes P à coefficients rationnels vérifiant $P(\alpha) = 0$.

▶ **B.1.a** Montrer que H_α est un groupe additif : on montrera que c'est un sous-groupe de $\mathbb{Q}$[X].

▶ **B.1.b** Montrer que pour tout élément $P \in H_\alpha$ et pour tout polynôme Q à coefficients rationnels (à savoir $Q \in \mathbb{Q}[X]$), le produit $P.Q$ est encore dans H_α.

▶ **B.1.c** H_α est-il un sous-anneau unitaire de $\mathbb{Q}$[X] ?

▶ **B.1.d** H_α est-il un espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$?

On appelle ω le polynôme unitaire de degré minimum appartenant à H_α. On notera $n \geq 1$ son degré. Il s'agit donc, parmi les polynômes **non nuls** et de plus petit degré appartenant à H_α, de celui dont le coefficient directeur est égal à 1. Il est bien unique.

▶ **B.2.a** Montrer, à l'aide d'une division euclidienne, que tout élément de H_α est divisible par ω.

▶ **B.2.b** Peut-on avoir $n = 1$?

▶ **B.3** Montrer que ω est irréductible sur $\mathbb{Q}$.

▶ **B.4** Montrer que, dans $\mathbb{R}$ considéré comme espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$, la famille $\{1, \alpha, \cdots, \alpha^{n-1}\}$ est une famille libre.

On note A_α le sous-espace vectoriel (sur $\mathbb{Q}$) de $\mathbb{R}$ engendré par cette famille. Il est donc de dimension n.

▶ **B.5.a** Montrer qu'un élément z de A_α s'écrit de façon unique sous la forme $z = K(\alpha)$ où $K \in \mathbb{Q}[X]$ est un polynôme de degré inférieur strictement à n.

▶ **B.5.b** Soit $Q \in \mathbb{Q}[X]$ un polynôme quelconque. Montrer que $Q(\alpha)$ appartient à A_α. On pourra introduire une division euclidienne de polynômes. Que peut-on dire en particulier de α^m, où $m \in \mathbb{N}$?

▶ **B.5.c.i** Montrer que le produit de deux éléments de A_α est encore un élément de A_α.

▶ **B.5.c.ii** Soit $z \in A_\alpha$ quelconque. Que peut-on dire de z^m, pour tout entier naturel m ?

▶ **B.6** Quelle est la structure algébrique de A_α ?

▶ **B.7** Soit z un élément quelconque de A_α.

▶ **B.7.a** Que peut-on dire de la famille $\{1, z, z^2, \cdots, z^n\}$ dans l'espace vectoriel A_α ?

▶ **B.7.b** Montrer que z est un nombre algébrique.

▶ **B.7.c** En déduire les inclusions $\mathbb{Q} \subset A_\alpha \subset A$.

▶ **B.8** Soit $z = P(\alpha)$ un élément non nul de A_α, où $1 \leq \text{degré}(P) \leq n - 1$.

▶ **B.8.a** Montrer que P est premier avec ω. On utilisera la question B.3.

▶ **B.8.b** En déduire qu'il existe un polynôme $U \in \mathbb{Q}[X]$ tel que $P(\alpha)U(\alpha) = 1$. Que peut-on en déduire pour z ?

▶ **B.9** Quelle est la structure algébrique de A_α ?

Partie C

Soit α et β deux nombres algébriques non nuls. On va montrer que $\alpha + \beta$ et $\alpha\beta$ sont encore des nombres algébriques. D'après la partie A, on peut se contenter de regarder le cas où α et β sont irrationnels tous les deux.

On notera n et m les dimensions de A_α et A_β : on a donc $n \geq 2$ et $m \geq 2$ d'après l'hypothèse que l'on vient de faire.

On note $C = \{\alpha^i \beta^j,\ 0 \leq i \leq n-1, 0 \leq j \leq m-1\}$ et A_C le sous-espace vectoriel (toujours sur le corps $\mathbb{Q}$ des rationnels) de $\mathbb{R}$ engendré par C.

▶ **C.1** Quelle est la dimension maximale de A_C ?

▶ **C.2** Montrer que pour tous entiers naturels r et s, le nombre $\alpha^r \beta^s$ appartient à A_C.

▶ **C.3** Montrer que pour tout entier naturel u, le nombre $(\alpha + \beta)^u$ appartient à A_C.

▶ **C.4** En déduire que $\alpha + \beta$ appartient à A. On pourra s'inspirer de la méthode de la question B.7.

▶ **C.5.a** Montrer que A est un groupe additif.

▶ **C.5.b** Montrer que A est un espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$.

▶ **C.6.a** Montrer que le produit $\alpha\beta$ est dans A. On pourra s'inspirer de la méthode de la question 8 de la partie B.

▶ **C.6.b** Que peut-on dire *actuellement* de la structure algébrique de l'ensemble A des nombres algébriques ?

▶ **C.7.a** Montrer que l'inverse de tout nombre algébrique non nul est encore un nombre algébrique. On pourra utiliser la fin de la partie B ou bien faire une démonstration directe en introduisant le polynôme ω de degré minimal défini en partie B.

▶ **C.7.b** Montrer que A est un corps.

Partie D

▶ **D.1.a** Soit $n \geq 1$ un entier naturel. Montrer que l'ensemble $\mathbb{Q}_n[X]$ des polynômes à coefficients rationnels et de degré inférieur ou égal à n est dénombrable.

▶ **D.1.b** En déduire que $\mathbb{Q}$[X] est dénombrable. On utilisera le théorème donné en introduction.

Il résulte de ceci que l'on peut numéroter les polynômes à coefficients rationnels sous la forme $P_1, P_2, \cdots, P_n, \cdots$. À chaque polynôme P_n de cette suite, on associe l'ensemble

Z_n de ses racines réelles. Chaque Z_n est donc une partie finie de $\mathbb{R}$, éventuellement vide.

▶ **D.2.a** Exprimer l'ensemble A à l'aide de la famille $Z_1, Z_2, \cdots, Z_n, \cdots$.

▶ **D.2.b** Montrer que l'ensemble A des nombres algébriques est dénombrable.

▶ **D.3** Sachant que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable, que peut-on en déduire pour l'ensemble des réels qui ne sont pas des nombres algébriques ?

Partie E

On va étudier quelques parties denses dans $\mathbb{R}$. Plus précisément, on montrera que pour chaque α nombre algébrique irrationnel, une certaine partie de A_α est dense dans $\mathbb{R}$. Le fait que A et chaque A_α en entier soit dense dans $\mathbb{R}$ n'a aucun intérêt, puisque ces parties contiennent toutes $\mathbb{Q}$, dont on sait qu'il est dense. Les deux premières questions démontrent un résultat général, n'ayant rien à voir avec les nombres algébriques.

Pour les questions 1 et 2, on se donne un sous-groupe additif G de $\mathbb{R}$, non réduit à $\{0\}$. On appelle G^+ l'ensemble des éléments strictement positifs de G, et m la borne inférieure de G^+. On sait que m existe car G^+ est non vide et minoré. Comme 0 est un minorant de G^+, on sait que $m \geq 0$.

▶ **E.1** Dans cette question, on suppose m strictement positive.

▶ **E.1.a** On suppose que $m \notin G$.

▶ **E.1.a.i** Montrer que tout intervalle ouvert $]m, m+h[$ contient au moins un élément de G^+.

▶ **E.1.a.ii** Montrer que l'intervalle ouvert $]m, 2m[$ contient au moins deux éléments de G^+.

▶ **E.1.a.iii** En déduire qu'il existe au moins un élément de G^+ dans $]0, m[$. Conclure à l'impossibilité.

▶ **E.1.b** Montrer que pour tout entier naturel k, le réel km appartient à G^+, et qu'il n'y a aucun élément de G dans l'intervalle $]km, (k+1)m[$.

▶ **E.1.c** En déduire que $G = m\mathbb{Z}$, l'ensemble des multiples entiers de m.

▶ **E.2** On se place maintenant dans le cas où $m = 0$.

▶ **E.2.a** Montrer que tout intervalle $]0, h[$ contient au moins un point de G^+.

▶ **E.2.b** Montrer que tout intervalle $]a, b[$, avec $0 < a < b$, contient au moins un point de G^+. On pourra introduire un élément x de G vérifiant $0 < x < b - a$, et la suite de ses multiples $x, 2x, 3x, \cdots$.

▶ **E.2.c** Que peut-on en conclure pour G dans $\mathbb{R}$?

Soit maintenant α un nombre algébrique irrationnel. On appelle G l'ensemble des réels de la forme $p + q\alpha$ lorsque p et q décrivent $\mathbb{Z}$.

▶ **E.3.a** Montrer que G est un sous-groupe additif de A_α (qui est défini en partie B).

▶ **E.3.b** Montrer qu'il est impossible que $m = \inf G^+$ soit strictement positive.

▶ **E.3.c** En déduire que G est dense dans $\mathbb{R}$.

▶ **E.4** Montrer, par exemple, que tout réel est limite d'une suite de nombres de la forme $p_n + q_n\sqrt{7}$ où (p_n) et (q_n) sont deux suites d'entiers relatifs.

▶ **E.5** Le résultat de la question 3.c reste-t-il vrai avec $G = \{3p+2q\alpha,\ p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{Z}\}$?

Corrigé

Partie A

▶ **A.1.a** Le rationnel $x = p/q$ est racine du polynôme $X - p/q$ à coefficients rationnels, et il est algébrique.

▶ **A.1.b** L'irrationnel $\sqrt{2}$ est racine du polynôme $X^2 - 2$, qui est à coefficients rationnels. C'est un nombre algébrique.

▶ **A.2** On a $x - \sqrt{2} = \sqrt{3}$, ce qui implique $(x - \sqrt{2})^2 = 3$, soit $2x\sqrt{2} = x^2 - 1$ et $8x^2 = (x^2 - 1)^2$. On a un polynôme de degré 4 à coefficients rationnels dont x est solution. C'est bien un nombre algébrique.

▶ **A.3** Tout polynôme à coefficients entiers est un polynôme à coefficients rationnels. Tout réel α qui est racine d'un polynôme à coefficients entiers est donc racine d'un polynôme à coefficients rationnels, et est ainsi un nombre algébrique.

Il faut maintenant montrer que si α est racine d'un polynôme à coefficients rationnels $P(X) = \dfrac{p_n}{q_n}X^n + \cdots + \dfrac{p_1}{q_1}X + \dfrac{p_0}{q_0}$, alors il est racine d'un polynôme à coefficients entiers. En appelant m le PPCM des dénominateurs $q_n, \cdots, q_1, q_0$, le polynôme $Q(X) = mP(X)$ est à coefficients entiers et α en est racine.

▶ **A.4** Soit α racine de $P(X) = \dfrac{p_n}{q_n}X^n + \cdots + \dfrac{p_1}{q_1}X + \dfrac{p_0}{q_0}$. Le nombre $\lambda\alpha$ est racine du polynôme $Q(X) = P(X/\lambda)$ qui reste à coefficients rationnels.

▶ **A.5** Soit α racine de $P(X) = \dfrac{p_n}{q_n}X^n + \cdots + \dfrac{p_1}{q_1}X + \dfrac{p_0}{q_0}$. Le nombre $\lambda + \alpha$ est racine du polynôme $Q(X) = P(X - \lambda)$ qui reste à coefficients rationnels. En effet, la formule du binôme de Newton permettant de développer $(X-\lambda)^p$, pour tout entier naturel p, ne fait intervenir que les $\binom{p}{k}$ qui sont des entiers naturels, et les puissances de λ qui sont des rationnels.

Partie B

▶ **B.1.a** Si P et Q sont dans H_α, alors $(P-Q)(\alpha) = P(\alpha) - Q(\alpha) = 0 - 0 = 0$, ce qui montre que $P - Q \in H_\alpha$. Cette propriété traduit que H_α est un sous-groupe additif de $\mathbb{Q}[\mathrm{X}]$.

▶ **B.1.b** On a $(P.Q)(\alpha) = P(\alpha) \times Q(\alpha)$, par définition du produit de deux polynômes. Comme $P(\alpha) = 0$, on a $(P.Q)(\alpha) = 0$, ce qui prouve que le produit $P.Q$ est encore dans H_α. Ceci est vrai quel que soit le polynôme Q à coefficients rationnels.

▶ **B.1.c** On vient de voir que H_α est un groupe additif. La question 1.b montre, comme cas particulier, que le produit de deux éléments de H_α est encore dans H_α.

Malheureusement, le polynôme $P(X) = 1$, élément neutre pour la multiplication des polynômes, n'est pas dans H_α, puisque $P(\alpha) = 1$ ne vaut pas 0. Nous n'avons pas un anneau unitaire !

▶ **B.1.d** Pour tout rationnel λ et tout $P \in H_\alpha$, le polynôme λP, qui reste à coefficients rationnels, admet α pour racine, et il est donc encore dans H_α. Sachant que H_α est un groupe additif, ceci montre que pour tous rationnels λ, μ, et pour tous $P, Q \in H_\alpha$, alors le polynôme $\lambda P + \mu Q$ est encore dans H_α.

Ceci montre que H_α est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{Q}[\mathrm{X}]$.

▶ **B.2.a** Soit P un élément quelconque de H_α. Ecrivons la division euclidienne de P par ω

$$P = Q\omega + R \quad \text{avec degré}(R) < \text{degré}(\omega)$$

(ce qui inclut le cas $R = 0$, puisque le degré du polynôme nul est $-\infty$).

On a

$$0 = P(\alpha) = Q(\alpha)\omega(\alpha) + R(\alpha) = 0 + R(\alpha)$$

ce qui montre que $R(\alpha) = 0$, et donc que R est dans H_α. Nous avons ainsi dans H_α un polynôme dont le degré est strictement inférieur à celui de ω. C'est impossible, par définition de ω, sauf si $R = 0$.

Le polynôme Q est donc divisible par ω. L'ensemble H_α est égal à $\omega(X)\mathbb{Q}[X]$, à savoir l'ensemble des polynômes à coefficients rationnels multiples du polynôme ω.

Le fait d'avoir pris ω unitaire ne joue aucun rôle, si ce n'est d'assurer l'unicité de ce polynôme.

▶ **B.2.b** Dire que ω est de degré 1 signifie que $\omega(X) = X - r$, où r est un rationnel. La relation $\omega(\alpha) = 0$ s'écrit $\alpha - r = 0$, ce qui équivaut à dire que α est un rationnel.

▶ **B.3** Supposons par l'absurde que ω ne soit pas irréductible, et s'écrive donc $\omega(X) = A(X).B(X)$ où A et B sont deux polynômes non constants à coefficients rationnels. Ils sont donc tous les deux de degrés **strictement** inférieurs au degré n de ω.

La relation $\omega(\alpha) = 0$ s'écrit $A(\alpha)B(\alpha) = 0$, ce qui signifie que (par exemple) $A(\alpha) = 0$. Le polynôme A appartient ainsi à H_α, tout en étant non nul et de degré strictement inférieur à celui de ω.

Ceci est contradictoire avec la définition de ω, et impossible.

▶ **B.4** Partons d'une combinaison linéaire nulle $\lambda_0+\lambda_1\alpha+\cdots+\lambda_{n-1}\alpha^{n-1} = 0$, où les λ_i sont tous des rationnels. Cela signifie que le réel α est racine du polynôme à coefficients rationnels $P(X) = \lambda_0+\lambda_1 X+\cdots+\lambda_{n-1}X^{n-1}$, qui est de degré **strictement inférieur** au degré n de ω.

Par définition de ω, ce polynôme est le polynôme nul : tous ces coefficients sont égaux à 0. On a $\lambda_0 = \cdots = \lambda_{n-1} = 0$, ce qui signifie que la famille est libre.

Le sous-espace vectoriel A_α est exactement de dimension n, puisqu'il est engendré par une famille libre de n vecteurs.

▶ **B.5.a** Par définition de la combinaison linéaire, z est de la forme

$$z = k_0 + k_1\alpha + \cdots + k_{n-1}\alpha^{n-1}$$

où les k_i sont des rationnels. Comme la famille est libre, cette écriture est unique.

En posant $K(X) = k_0 + k_1 X + \cdots + k_{n-1}X^{n-1}$, nous avons $z = K(\alpha)$, et cette écriture est unique.

▶ **B.5.b** Effectuons la division euclidienne du polynôme Q par le polynôme ω :

$$Q(X) = \omega(X)H(X) + R(X)$$

avec donc $R = 0$ ou bien degré$(R) \leq n-1$, à savoir $R(X) = r_0 + r_1 X + \cdots + r_{n-1}X^{n-1}$ où les r_i sont des rationnels.

On a $Q(\alpha) = \omega(\alpha)H(\alpha) + R(\alpha) = R(\alpha)$, puisque $\omega(\alpha) = 0$. On a donc $R(\alpha) = r_0 + r_1\alpha + \cdots + r_{n-1}\alpha^{n-1}$, qui est un élément de A_α.

Le cas particulier $Q(X) = X^m$ nous dit que α^m est dans A_α.

▶ **B.5.c.i** Tout élément de A_α est donc un polynôme à coefficients réels en α.

Le produit de deux éléments $P_1(\alpha)$ et $P_2(\alpha)$ de A_α, à savoir $(P_1.P_2)(\alpha)$, est encore un polynôme à coefficients rationnels en α : c'est encore un élément de A_α.

▶ **B.5.c.ii** La question précédente nous dit que $z^2 = z.z$ est encore dans A_α. Une récurrence, utilisant $z^m = z.z^{m-1}$ permet de montrer aisément que $z^m \in A_\alpha$ pour tout entier naturel m.

▶ **B.6** Puisque A_α est un espace vectoriel, c'est en particulier un groupe additif. Nous venons juste de montrer qu'il est stable par multiplication.

Par ailleurs, le rationnel 1, élément neutre de la multiplication de l'anneau $\mathbb{R}$, appartient (par construction) à A_α. Nous avons ainsi les propriétés permettant d'affirmer que A_α est un sous anneau unitaire de $\mathbb{R}$. C'est donc un anneau unitaire.

▶ **B.7.a** Nous avons une famille de $n+1$ éléments de l'espace vectoriel A_α qui est de dimension n. C'est automatiquement une famille liée.

▶ **B.7.b** Il existe donc $n+1$ rationnels $r_0, r_1, \cdots, r_n$ non tous nuls tels que

$$r_0 + r_1 z + r_2 z^2 + \cdots + r_n z^n = 0$$

En posant $K(X) = r_0 + r_1 X + \cdots + r_n X^n$, nous avons $K(z) = 0$. Cela signifie que z est un nombre algébrique.

▶ **B.7.c** Nous venons de montrer que tout élément de A_α est un nombre algébrique. Tout rationnel p/q est de la forme $P(\alpha)$ avec $P(X) = p/q$ polynôme constant, et est donc un élément de A_α. On a bien les deux inclusions demandées.

▶ **B.8.a** C'est un résultat très général, sans rapport avec le problème actuel. Un polynôme non constant P qui n'est pas premier avec un polynôme irréductible ω est nécessairement divisible par ω, puisque ω n'admet pour diviseur que les constantes et lui-même.

Mais comme le degré de P est strictement inférieur à celui de ω, ceci n'est pas possible.

▶ **B.8.b** L'identité de Bézout dans $\mathbb{Q}$[X] nous dit qu'il existe deux polynômes U, V à coefficients rationnels tels que

$$P(X)U(X) + \omega(X)V(X) = 1$$

En prenant les fonctions polynômes associées (de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$), en se plaçant au réel α, il vient

$$P(\alpha)U(\alpha) + \omega(\alpha)V(\alpha) = 1 \quad \text{soit} \quad P(\alpha)U(\alpha) = 1$$

Le nombre algébrique $z = P(\alpha)$ a pour inverse $\dfrac{1}{z} = U(\alpha)$, qui est bien un élément de A_α.

▶ **B.9** Dans A_α, tout élément $P(\alpha)$ avec degré$(P) \geq 1$ est inversible pour la multiplication : l'inverse est le réel $U(\alpha)$.

♠ Pour degré$(P) = 0$, nous avons les constantes, à savoir les rationnels p/q, dont l'inverse q/p est évidemment encore dans A_α.

Tout élément non nul de A_α est donc inversible dans A_α, ce qui signifie que A_α est un corps, qui contient $\mathbb{Q}$.

Partie C

▶ **C.1** La famille C compte a priori $n \times m$ éléments. Elle engendre un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$ de dimension maximale nm. Rappelons que tous nos espaces vectoriels sont sur $\mathbb{Q}$.

▶ **C.2** D'après la partie B, pour tout entier r, le réel α^r est une combinaison linéaire à coefficients rationnels $\alpha^r = \lambda_{0,r} + \lambda_{1,r}\alpha + \cdots + \lambda_{n-1,r}\alpha^{n-1}$ et pour tout entier s, le réel β^s est une combinaison linéaire à coefficients rationnels $\beta^s = \mu_{0,s} + \mu_{1,s}\beta + \cdots + \mu_{m-1,s}\beta^{m-1}$. Le produit

$$\alpha^r\beta^s = (\lambda_{0,r} + \lambda_{1,r}\alpha + \cdots + \lambda_{n-1,r}\alpha^{n-1})(\mu_{0,s} + \mu_{1,s}\beta + \cdots + \mu_{m-1,s}\beta^{m-1})$$

est bien une combinaison linéaire à coefficients rationnels des éléments de C : c'est un élément de A_C.

▶ **C.3** La formule du binôme de Newton permet de développer

$$(\alpha + \beta)^u = \sum_{k=0}^{u} \binom{u}{k} \alpha^k \beta^{u-k}$$

qui est une combinaison linéaire à coefficients rationnels d'éléments de A_C. C'est donc un élément de A_C.

▶ **C.4** L'espace vectoriel A_C est au maximum de dimension $n \times m$. La famille

$$\{1, \alpha + \beta, (\alpha + \beta)^2, \cdots, (\alpha + \beta)^{nm}\}$$

qui est formée de $nm + 1$ éléments de A_C est obligatoirement une famille liée. Il existe des rationnels non tous nuls $r_0, r_1, \cdots, r_{nm}$ tels que

$$r_0 + r_1(\alpha + \beta) + \cdots + r_{nm}(\alpha + \beta)^{nm} = 0$$

Le réel $\alpha + \beta$ est racine du polynôme $r_0 + r_1X + \cdots + r_{nm}X^{nm}$ à coefficients rationnels : c'est un nombre algébrique.

▶ **C.5.a** Montrons simplement que A est un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$. Prenons deux éléments quelconques α et β dans A. La partie A a montré que $-\beta$ est encore dans A. La question précédente montre que la somme $\alpha + (-\beta) = \alpha - \beta$ est encore dans A. Nous vérifions ainsi la condition nécessaire et suffisante pour que A soit un sous-groupe de $\mathbb{R}$.

▶ **C.5.b** Nous avons vu en partie A que le produit d'un nombre algébrique par un rationnel est un nombre algébrique. Nous venons de montrer que la somme de deux nombres algébriques l'est aussi. Pour tous rationnels λ et μ, pour tous nombres algébriques α, β, le réel $\lambda\alpha + \mu\beta$ est donc encore un nombre algébrique. Cette propriété montre que A est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$, considéré comme espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$.

▶ **C.6.a** La deuxième question de cette partie C montre que les réels

$$1, \alpha\beta, (\alpha\beta)^2, \cdots, (\alpha\beta)^{nm}$$

sont des éléments de A_C. Cette famille de $nm+1$ éléments de A_C est de nouveau une famille liée, et il existe des rationnels $p_0, p_1, \cdots, p_{nm}$ non tous nuls tels que

$$p_0 + p_1(\alpha\beta) + \cdots + p_{nm}(\alpha\beta)^{nm} = 0$$

De nouveau, le produit $\alpha\beta$ est un nombre algébrique, comme racine du polynôme non nul $p_0 + p_1 X + \cdots + p_{nm}X^{nm}$ à coefficients rationnels.

▶ **C.6.b** L'ensemble A a déjà une structure de groupe additif. Il contient le rationnel 1, élément neutre de la multiplication. Le produit de deux éléments de A reste dans A : est donc un sous-anneau unitaire de $\mathbb{R}$.

▶ **C.7.a** Soit α non nul dans A. Faisons une démonstration directe.

- Soit $\omega(X) = r_0 + r_1 X + \cdots + X^n$ le polynôme unitaire de degré minimal associé à α.
- On a donc $\alpha \times (r_1 + r_2\alpha + \cdots + \alpha^{n-1}) = -r_0$.
- On a nécessairement $r_0 \neq 0$. Sinon, on aurait $r_1 + r_2\alpha + \cdots + \alpha^{n-1} = 0$. Il existerait ainsi un polynôme K non nul de degré strictement inférieur au degré de ω, et vérifiant $K(\alpha) = 0$. Ceci est impossible, vu la définition de ω.
- On peut donc écrire $\dfrac{1}{\alpha} = -\dfrac{r_1 + r_2\alpha + \cdots + \alpha^{n-1}}{r_0}$, qui est un élément de A_α et donc de A.

Ce résultat a été montré en fin de partie B : A_α est un corps. L'élément α qui en fait partie a donc son inverse $1/\alpha$ qui est dans A_α. C'est en particulier un nombre algébrique, et il est dans A.

▶ **C.7.b** A est un anneau, et tout élément non nul a un inverse dans A. On a un corps.

Partie D

▶ **D.1.a** L'ensemble $\mathbb{Q}_n[X]$ est en bijection avec $\mathbb{Q}^{n+1}$ via l'application $r_0 + r_1 X + \cdots + r_n X^n \mapsto (r_0, r_1, \cdots, r_n)$. Comme $\mathbb{Q}^{n+1}$ est dénombrable, et il en va de même de $\mathbb{Q}_n[X]$ d'après l'introduction.

▶ **D.1.b** $\mathbb{Q}$[X] est la réunion des $\mathbb{Q}_n[X]$ lorsque n décrit $\mathbb{N}$. On a une réunion dénombrable d'ensembles dénombrables, ce qui est encore un ensemble dénombrable, d'après le théorème cité en introduction.

François Cottet-Emard

36 problèmes corrigés pour le CAPES de mathématique

Ces problèmes, dont l'énoncé varie entre 2 et 5 pages, sont rédigés dans l'optique actuelle des sujets donnés aux différents concours, avec un découpage en plusieurs parties et des questions plus détaillées et plus précises. Les rapports entre les différentes parties sont clairement indiqués. Ils s'adressent aussi bien aux étudiants en fin de L2 désirant vérifier et consolider leurs connaissances avant de continuer dans un L3 de Mathématiques qu'aux élèves des CPGE et aux candidats au CAPES de Mathématiques, les programmes étant tous identiques.

Chaque problème est précédé des rappels nécessaires, en particulier quand sont utilisés des définitions ou des théorèmes présentant plusieurs énoncés possibles suivant le niveau considéré. Aucun résultat de niveau L3 n'est nécessaire.

L'ouvrage comporte quatre chapitres – algèbre, analyse, probabilités et géométrie –, le dernier étant plutôt destiné aux étudiants préparant le CAPES. Ils sont indépendants les uns des autres et présentés dans un ordre qui n'est pas lié à leur difficulté. Les mots-clés de la table des matières donnent en un coup d'œil le cadre du sujet de chacun.

Les solutions sont complètes et très détaillées, et certaines contiennent des algorithmes pour une mise en œuvre avec un logiciel de calcul formel.

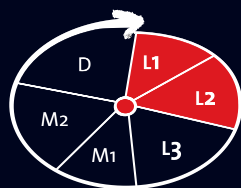
Les « plus »

- Des sujets dans tous les domaines actuels des mathématiques
- Conception et rédaction dans l'optique des concours d'aujourd'hui
- Des corrections très détaillées rappelant les connaissances essentielles

François Cottet-Emard, *Maître de Conférences Hors-Classe à l'Université de Paris-Sud.*

PROCAP
ISBN : 978-2-8073-0208-2
9 782807 302082
www.deboecksuperieur.com

Dans le cadre du nouveau Système Européen de Transfert de Crédits (E.C.T.S.), ce manuel couvre
en France les niveaux : Licence 1 et 2
en Belgique : Baccalauréat 1 et 2
en Suisse : Bachelor 1 et 2
au Canada : Baccalauréat 1 et 2



Conception graphique : Primo&Primo